**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**

**ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**«ШАХТЁРСКАЯ ОСНОВНАЯ ШКОЛА №11»**

***КАЛЕЙДОСКОП ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ***

***ДЛЯ 5-6 КЛАССОВ***

ПОДГОТОВИЛА

Демичева Ирина Владимировна,

учитель математики,

специалист 1 квалификационной категории

г.Шахтёрск, 2021

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Ведение …………………………………………………………………………………...…..3**

**Тема 1. Принцип Дирихле……………………………………………………….……….….4**

**Тема 2. Задачи на проценты и части…………………………………….…………………8**

**Тема 3. Делимость………………………………………………………….………………..15**

**Тема 4. Некоторые эвристические приемы решения задач……………………………21**

**Тема 5. Задачи по геометрии………………………………………………………………..25**

**Тема 6. Логические задачи…………………………………………………………………..41**

**Тема 7. Разные задачи………………………………………………………………………..43**

**Тема 8. Математические соревнования……………………………………………………50**

**Интернет источники………………………………………………………………………….57**

**Введение**

Одной из задач образовательной политики в Донецкой Народной Республике является обеспечение современного качества образования на основе сохранения его фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства.

Сегодня общеобразовательная школа ориентирована не только на усвоение определенной суммы знаний учащимися, но и на развитие личности, ее познавательных и созидательных способностей.

Наиболее эффективным средством развития, выявления способностей и интересов учащихся являются конкурсы и олимпиады разных уровней

Значительно продвинулось развитие конкурсов, олимпиад благодаря использованию новых информационных и коммуникационных технологий.

Уровень задач, предлагаемых на математических конкурсах, олимпиадах, заметно выше того, что изучают обучащиеся массовых школ на уроках, факультативах, занятиях математических кружков.

Одним из наиболее сложных моментов в обучении остается вопрос: как научить учащихся решать нестандартные задачи? Между тем обучение решению нестандартных задач на раннем этапе при подготовке к конкурсам, олимпиадам могло бы развивать математические способности и интерес к предмету у обучащихся и повышать квалификацию учителей массовой школы.

Роль учителя в этом деле огромная. В первую очередь учитель обязан создать благоприятные условия для того, чтобы ученик смог постигать новое в интересующей его науке. С помощью знаний учителя, умением методически правильно поставить перед учеником задачу посильную ученику, он добьется успеха.

Интерес ученика к получению знаний в той или иной области позволяет развить у него нестандартность мышления, что является очень актуальным на данном уровне развития общества.

Умение логически нестандартно мыслить поможет учащемуся в дальнейшем занять достойное место в этом обществе.

В данном сборнике подобраны олимпиадные задачи по математике для обучающихся 5-6 классов

**Тема 1. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ**

Задача 1

В классе 30 человек. Саша Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (работа может быть и безошибочной).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Решение.

Предположим, что никакие 3 ученика не сделали одинаковое число ошибок, т.е. в каждую клетку от 0 до 12 попало меньше трех школьников. Тогда в классе не больше 2\*13+1=27, а в классе 30 учеников. Значит, наше предположение неверно. Поэтому найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

Задача 2

В Москве живет около 8,3 млн. человек на голове у каждого не более 100 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 80 человек с одинаковым числом волос на голове.

Решение.

Пусть в наших клетках – люди с одинаковым числом волос на голове: 0 волос, с 1 волосом, с двумя и т.д. до 100 000 волос. Всего у нас 100 001 клетка. И пусть в каждой клетке не более 80 человек. Тогда население Москвы не более 80\*100 001= 8 000 080, а всего 8 300 000 человек. Значит, наше предположение неверно.

Задача 3

Пусть в классе 41 человек. Маша Петрова сделала больше всех ошибок – 13. Докажите, что найдутся четверо учащихся, сделавших одинаковое число ошибок. Безошибочных работ не было.

Решение.

Клетки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13- число ошибок.

Предположим, что только трое сделали одинаковое число ошибок. Тогда в классе не больше, чем 3\*13=39 человек, а их 41. Значит, найдутся четверо, которые сделали одинаковое число ошибок.

Задача 4

В хвойном лесу 800 000 елей, и ни на одной из них не более 500 000 игл. Докажите, что по крайней мере у двух елей число игл одинаковое.

Решение

Пусть в одну клетку попали ели с одинаковым числом иголок 0; 1; 2; … 500 000. Если в каждой клетке по одной ели, то их 1\*500 000=500 000, а в лесу – 800 000. Значит, хотя бы у двух елей число игл одинаковое.

Задача 5

В городе 15 школ. В них обучается 6015 школьников. В концертном зале городского Дворца культуры 400 мест. Докажите, что найдется школа, ученики которой не поместятся в этом зале.

Решение.

Предположим, что в каждой школе не более 400 учеников. Значит, в 15 школах не более 15\*400=6000 школьников. Но, по условию, в школах обучается 6015 человек. Значит, найдется школа, в которой больше 400 учеников. Поэтому ученики этой школы не поместятся в зале на 400 мест.

Задача 6.

20 учеников (больше половины из них – девочки) сидят за круглым столом. Докажите, что какие-то две девочки сидят напротив друг друга.

Решение.

Образуем 10 пар из учеников, сидящих напротив друг друга. Так как девочек больше половины, то есть больше 10, то найдется пара, состоящая из двух девочек.

Задача 7.

15 девочек собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое

количество орехов.

Решение.

Пусть все девочки собрали разное количество орехов: 1; 2; 3; …; 15. Тогда суммарное количество собранных орехов равно (1+ 15)/ 2\*15= 120>100. Значит, какие-то две девочки собрали одинаковое количество орехов.

Задача 8

На далекой планете, имеющей форму шара, суша занимает больше половины поверхности планеты. Докажите, что можно прорыть туннель, проходящий через центр планеты, который соединит сушу с сушей.

Решение.

Покрасим сушу на планете в зеленый цвет, а поверхность планеты, симметричную суше,- в синий. Так как суша занимает больше половины поверхности планеты, то найдется точка на планете, покрашенная в оба цвета. Через нее и надо рыть туннель.

Задача 9

В походе участвовало 25 человек, каждому из которых было от 24 до 30 полных лет (на данный день) Докажите, что найдутся четыре человека, родившихся в один год.

Решение.

Различных годов рождения может быть 7. Предположим, что каждый год родилось не более трех участников похода. Значит, за 7 лет могли родиться не более 3\*7=21 участника. Но, по условию, в походе участвовало 25 человек. Получили противоречие. Значит, найдутся четыре участника похода, родившихся в один год.

Задача 10

На шахматной доске 8 \* 8 отмечены центры всех полей. Можно ли 13 прямыми разбить доску на части так, чтобы в каждой части было не более одной отмеченной точки?

Решение.

Рассмотрим внешний ряд клеток доски (по периметру). Центры полей образуют квадрат 7 \* 7, между ними 28 промежутков. Мы должны разбить доску так, чтобы все отмеченные точки попали в разные части. Значит, прямые должны пересекать все промежутки между клетками. Но прямая может пересечь стороны квадрата не более чем в двух точках (случай противоположных по диагонали вершин квадрата нужно исключить), значит, нужно не менее 14 прямых.

Задача 11

Внутри равностороннего треугольника со стороной 10 отмечено пять точек. Докажите, что найдутся две из них, расстояние между которыми будет не более 5.

Решение.

Разделим треугольник на 4 равных равносторонних треугольника. Длина их стороны равна 5, значит, расстояние между любыми двумя точками маленького треугольника не более 5. Точек 5, треугольников 4, значит, хотя бы 2 точки попадут в один треугольник. И расстояние между ними будет не более пяти.

Задача 12

Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр друг от друга.

Решение.

Рассмотрим вершины равностороннего треугольника со стороной 1 метр. Если две точки разного цвета, то третья обязательно либо первого, либо второго цвета, значит, мы нашли две точки одного цвета.

Задача 13

В магазин привезли 25 ящиков конфет трех разных сортов (в каждом ящике – только один сорт). Докажите, что есть хотя бы 9 ящиков с одним и тем же сортом конфет.

Решение.

Если бы ящиков с конфетами каждого из трех сортов привезли не более 8, то всего привезли бы не более 24-х ящиков, что противоречит условию. Значит, найдутся 9 ящиков с одинаковым сортом конфет.

Задача 14

Какое максимальное количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение.

Каждая ладья бьет горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стоит. Значит, на каждой горизонтали можно поставить не более одной ладьи, всего ладей будет не более восьми. Для 8 ладей можно придумать много вариантов расстановок, например, по диагонали.

Задача 15

На окно размером 40 см \* 30 см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см \* 11 см можно прихлопнуть сразу трех мух.

Решение.

Разделим окно на 12 квадратов размером 10 см \* 10 см. Если в каждом квадрате не более двух мух, то всего на окне не более 2 \* 12 = 24 мух, а по условию мух 25, значит, в каком - то квадрате сидит хотя бы 3 мухи. Мухобойка закроет этот квадрат. Значит, такой мухобойкой можно прихлопнуть сразу трех мух.

Задача 16

В коробке лежат карандаши: 4 красных и 3 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не менее одного синего?

Ответ: 5 карандашей.

Задача 17

У мальчика 9 медных монет. Докажите, что у него есть хотя бы три монеты одинакового достоинства.

Решение.

Всего различных медных монет 4. Пусть мальчик имеет набор по 2 монеты каждого вида, всего будет 8 монет. Оставшаяся монета из 9 имеющихся, будет третьей монетой одного из видов. Значит, у мальчика есть хотя бы 3 монеты одинакового достоинства.

Задача 18

Какое наименьшее количество любых натуральных чисел следует взять, чтобы среди них всегда нашлась такая пара чисел, разность которых делилась бы на 5?

Решение.

Разобьем множество натуральных чисел на 5 классов: к первому классу отнесем все числа, которые при делении на 5 дают остаток, равный 0, ко второму классу – остаток, равный 1, к третьему классу - остаток, равный 2, к четвертому классу – остаток, равный 3, к пятому – остаток, равный 4. Очевидно, что разность двух чисел, принадлежащих разным классам, на 5 не делится. Если же взять шесть чисел, то среди них обязательно найдутся два числа, принадлежащие одному и тому же классу, и разность этих чисел делится на 5.

Итак, наименьшее количество натуральных чисел, которое следует взять, равно 6.

Задача 19

В классе 41 ученик написал по три контрольные работы. В результате учитель не поставил ни одной неудовлетворительной отметки, и каждый ученик получил все остальные отметки. Узнав об этом, один ученик заметил, что по крайней мере 7 человек получили одинаковые отметки по всем трем контрольным, а другой, подумав, сказал, что таких учеников с одинаковыми отметками, наверно будет 8. Кто из них прав?

Решение.

Разобьем класс на группы в соответствии со всевозможными наборами отметок: 3, 4, 5; 3, 5, 4; 4, 3, 5; 4, 5, 3; 5, 4,3; 5, 3, 4 (всего 6 групп). Если в каждой из этих групп не больше 6 человек, то всего в классе не больше 36 человек, что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере в одной из этих групп не меньше 7 человек. Возможен, однако, и случай, когда в каждой группе не больше 7 человек (например, в одной группе 6, а в остальных – по 7 человек), и, следовательно, утверждение второго ученика может быть не верным.

Итак, прав только первый ученик.

Ответ: первый ученик

Задача 20

В школе 370 учеников. Найдутся ли в этой школе хотя бы два ученика, у которых день рождения приходится на одну и ту же дату календаря?

Ответ: да

Задача 21

У каждого из пяти мальчиков было не меньше одного шара, а всего у них было 7 шаров. Мог ли кто- либо из них иметь: а) 3 шара? б) 4 шара?

Ответ: а) да; б) нет

**Тема 2. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ И ЧАСТИ**.

Задача 1

Товар подорожал на 30%, а затем подешевел на 30%. Как изменилась цена этого товара?

Решение.

Товар подорожал на 30%, то есть стал стоить 130%, что составляет 130:100=1,3 от первоначальной цены. Затем он подешевел на 30%, то есть стал стоить 100% - 30% = 70%, что составляет 70: 100 = 0,7 от новой цены. Пусть первоначальная цена была х. После подорожания товар стал стоить 1,3х, а после удешевления о.7\*1,3х=0,91х. Найдем разницу между начальной и конечной ценой х-0,91х=0,09х, что составляет 0,09\*100%=9% от начальной цены. Товар подешевел на 9%.

Ответ: 9%.

Задача 2

Числитель дроби увеличивается на 20%. На сколько процентов надо увеличить её знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

Решение.

Дробь$ \frac{a}{b}×\frac{1.2a}{k\*b}=2\frac{a}{b}; \frac{1.2}{k}=2;2k=1.2$

k = 0.6

Нужно уменьшить знаменатель на 40%

Ответ: 40%.

Задача 3

В двух бочках было воды поровну. В первой бочке количество воды сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. Во второй вначале уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%.

В какой бочке стало больше воды?

Решение.

Пусть a – начальный объем воды в каждой из двух бочек отдельно. Тогда определим объем воды в каждом из двух случаев.

Если сначала уменьшили на 10%, а потом увеличили на 10%, то a × 0,9 × 1,1 = 0,99а

Если сначала увеличили на 10%, а потом уменьшили на 10%, то а × 0,9 × 1,1 = 0,99а

Таким образом, в каждом случае получается 0,99а. Значит, в каждой из бочек воды станет поровну.

Ответ: поровну.

Задача 4

Число а составляет 75% числа b и 40% числа с. Число с на 42 больше, чем b. Найдите числа а и b.

Решение.

Пусть $а=0,75b, а=0,4с$. По условию задачи имеем:

$$0,75b=0,4с, 75b=40с, 15b= 8с$$

$$с=\frac{15}{8}b; \frac{15}{8}b-b=42; \frac{7}{8}b=42;b=48$$

$$a=\frac{3}{4}\*48=36$$

Ответ: а=36, b=48.

Задача 5

Три ящика наполнены орехами. Во втором ящике на 10% орехов больше, чем в первом, и на 30% больше, чем в третьем.

Сколько орехов в каждом ящике, если в первом на 80 орехов больше, чем в третьем?

Решение.

Пусть в первом ящике находиться х орехов, во втором ящике – у орехов, в третьем ящике – z орехов. Получаем: $y=1.1x, y=1.3z.$

$$x=\frac{10}{11}y; z=\frac{10}{13}y$$

Зная, что в первом ящике на 80 орехов больше, чем в третьем, получим:

$\frac{10}{11}y-\frac{10}{13}y=80,$ $\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)y=8; \frac{2}{11\*13}y=8,$

$$y=\frac{143\*4}{1}=572;x=520;z=440.$$

Ответ: 520; 572; 440

Задача 6

В автобусе ехало меньше 100 человек, причем число сидящих пассажиров было вдвое больше числа стоящих. На остановке 4% пассажиров вышли.

Сколько пассажиров осталось в автобусе?

Решение.

Так как число сидящих пассажиров было вдвое больше числа стоящих, то общее количество пассажиров кратно 3. Так как на остановке 4% пассажиров вышли, то количество вышедших составляет одну двадцать пятую от общего количества пассажиров. Значит, общее количество пассажиров кратно 25. Чисел, меньших 100 и кратных 25, всего три: 25, 50 и 75. Среди них только 75 делится на 3. Поэтому было 75 пассажиров, трое вышли, а осталось 72.

Ответ: 72.

Задача 7

В городе N живет 44100 человек. Известно, что каждые три года население увеличивалось на 5%.

Сколько жителей было в городе N два года назад?

Решение.

$$x\*\left(1+0,05\right)^{2}=44100;$$

$$x\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{21}{20}\right)^{2}=44100;$$

$$\frac{441x}{400}=44100;$$

$$x=40000$$

Ответ: 40000

Задача 8

Сколько процентов 8 процентов составляют от 40 процентов?

Решение.

Пусть а – число, от которого берем проценты, тогда получаем: $\left(0,08a:0.4a\right)\*100\%=20\%.$

Ответ: 20%

Задача 9

Даже когда верблюд Дезире хочет пить, 84% его веса составляет вода. После того как он напьётся воды, его вес станет равным 800 кг, а вода будет составлять 85% его веса.

Сколько весит Дезире, когда испытывает жажду?

Решение.

Пусть х кг весит верблюд Дезире, когда хочет пить, при этом 84% его веса составляет вода, а 16% - собственная масса, которая будет равна $0,16x$ кг. После того как он напьется воды, его вес станет равным 800 кг, вода будет составлять 85% его веса, а собственная масса составит 15%, что равно $800 кг \* 0,15=120кг.$

Получаем уравнение $0,16x=120$. Откуда х = 750. Поэтому 750 кг весит Дезире, когда испытывает жажду.

Ответ: 750 кг.

Задача 10

В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке 60% к текущей сумме на счете, во втором – 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось.

Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?

Решение.

Пусть всего у него было а рублей и х – часть денег, которые он положил в первый банк.

Тогда имеем:

$$1.6^{2}ax+a\left(1-x\right)1.4^{2}=2a,$$

$$2.56x+1.96\left(1-x\right)=2,$$

$$x=\frac{1}{15}.$$

Значит, в первый банк он положил $\frac{1}{15}$ всех своих денег.

Ответ: $\frac{1}{15}$

Задача 11

Нефтепровод проходит мимо трех деревень А, В, С. В первой деревне сливают 30% от первоначального количества нефти, во второй – 40% от того количества, которое дойдет до деревни В, а в третьей – 50% от того количества, которое дойдет до деревни С.

Сколько процентов нефти от первоначального количества доходит до конца нефтепровода?

Решение.

$0,3а$ сливают в А, остается $0,7а$.

$$0,4\*0,7a=0.28a \left(B\right)$$

$0.7a-0.28a=0.42a$ – после деревни В

После деревни С имеем:

$$0,42a-0.21a=0.21a$$

Ответ: 21%

Задача 12

Из молока, жирность которого 5%, изготавливают творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%.

Сколько творога получается из 1 т молока?

Решение.

х кг – творога.

$0.155x+(1000-x)\*0.005=0.05\*1000$.

$0.155x+5-0.005x=50$.

$0.15x=45$.

$x=45:0.15$.

$$x=300$$

Ответ: 300 кг.

Задача 13

Одно число больше другого на 16. Найдите эти числа, если $\frac{5}{32}$ одного числа равно $\frac{3}{16}$ другого.

Решение.

Пусть первое число – х, а второе – у. По условию задачи имеем:

$$\frac{5}{32}x=\frac{3}{16}y;$$

$$5x=6y;$$

$$x=\frac{6}{5}y.$$

Так как по условию задачи одно число больше другого на 16, то получаем:

$$\frac{6}{5}y-y=16$$

$$0.2y=16$$

$$y=80$$

$$x=\frac{6}{5}\*80=6\*16=96$$

Таким образом, искомые числа 96 и 80.

Ответ: 96 и 80.

Задача 14

Одну из сторон прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов надо уменьшить другую сторону, чтобы площадь прямоугольника не изменилась7

Решение.

Если $a и b$ – длины сторон вначале, то $S=ab$.

После изменения: $\frac{5}{4}a\*yb=ab,\frac{5}{4}y=1, y=\frac{4}{5}. \frac{4}{5}\*100\%=80\%.$ 80% стала составлять вторая сторона. Она уменьшилась на $100\%-80\%=20\%$

Ответ: 20%

Задача 15

Пастух привел на мясокомбинат две трети от трети своего скота. Оказалось, что это 70 быков.

Сколько скота в стаде?

Решение

Если пастух привел на мясокомбинат две трети от своего скота, то 1/3 будет 35 быков, а всего было $35\*3=105$ (быков).

Ответ: 105 быков.

Задача 16

В классе число отсутствующих учеников составляло $\frac{1}{6}$ часть присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих.

Сколько учеников в классе?

Решение.

Изначально присутствующих было в 6 раз больше, чем отсутствующих, то есть отсутствующие составили 1/7 часть числа всех учащихся. После выхода одного ученика из класса отсутствующие составили 1/6 часть от общего числа учащихся.

Значит, 1 ученик составляет $1/6-1/7=1/42$ часть класса, а в классе 42 ученика.

Ответ: 42 ученика

Задача 17

Цену товара уменьшили на 10%, а затем ещё на 10%.

Стоит ли товар дешевле, если его цену сразу снизить на 20%?

Решение.

Пусть начальная цена товара – а, тогда имеем:

$a\*0.9\*0.9=0.81a$, получили 81% начальной стоимости.

$a\*0.8=0.8a$, получили 80% начальной стоимости.

Ответ: после снижения сразу на 20% товар дешевле.

Задача 18

Баба Яга варит волшебное зелье: к 1,5 кг меда она добавила 100 г растертых волчьих когтей, 100 г дегтя и 300 г слез кикиморы. Сколько процентов слез кикиморы содержит это варево?

Решение.

$1500+100+100+300=2000$ (г).

$300:2000=0,15$.

$0,15\*100\%=15\%$.

Ответ: 15%

Задача 19

После того как цены на билеты в кино повысили на 50%, число зрителей снизилось на 40%.

Как изменилась выручка кинотеатра?

Решение.

х рублей – цена билета в начале; у – столько было зрителей, ху рублей – выручка.

1,5x рублей – новые цены, 0,6y – стало зрителей.

$1,5x\*0.6y=0.9xy$ – новая выручка.

$\frac{0,9xy}{xy}\*100\%=90\%.$ Новая выручка составила 90% от старой.

Ответ: 90%

Задача 20

Фирма «Дизель» купила на распродаже автомобиле на 35% ниже начальной цены, а продала на 25% ниже начальной цены.

Сколько процентов прибыли она получила?

Решение.

Израсходовала на покупку 0,65а, а продала по цене 0,75а. Прибыль $0,75a-0.65a=0.1a$

Прибыль $\frac{0,1a}{0.65a}\*100\%=\frac{10}{65}\*100\%=\frac{200}{13}\%=15\frac{5}{13}\%.$

Ответ: $15\frac{5}{13}\%$

Задача 21

На конференции 85% делегатов знают английский язык, 75% - испанский язык.

Какая часть делегации знает оба языка?

Решение.

По-испански не говорят $100\%-75\%=25\%$.

По-английски не говорят $100\%-85\%=15\%.$

На одном языке говорят $25\%+15\%=40\%.$

Значит, на двух языках говорят $100\%-40\%=60\%.$

Ответ: 3/5

Задача 22

На сколько уменьшится дробь, если её числитель увеличить на 25%, а её знаменатель увеличить на 50%?

Решение.

Пусть в знаменателе было число b, а в числителе – число а. Тогда после увеличения в числителе стало 1,25а, в знаменателе – 1,50b. Получаем дробь:

$\frac{1,25a}{1.50b}=\frac{125a}{150b}=\frac{5a}{6b}$.

Вычтем из первоначальной дроби получившуюся: $\frac{a}{b}-\frac{5a}{6b}=\frac{a}{6b}$

$\left(\frac{a}{6b}:\frac{a}{b}\right)\*100\%=\frac{100}{6}\%=16\frac{2}{3}$%.

Ответ: $16\frac{2}{3}\%$

Задача 23

На сколько процентов уменьшится дробь, если её числитель уменьшить на 20%, а знаменатель увеличить на 50%?

Решение.

Пусть в знаменателе было число b, а в числителе – число а. Тогда после уменьшения в числителе стало 0,80а, в знаменателе после увеличения – 1,50b. Получаем дробь: $\frac{0,80a}{1.50b}=\frac{80a}{150b}=\frac{8a}{15b}.$

Вычтем из первоначальной дроби получившуюся:

$$\frac{a}{b}-\frac{8a}{15b}=\frac{7a}{15b}.$$

$$\left(\frac{7a}{15b}:\frac{a}{b}\right)\*100\%=\frac{700}{15}\%=\frac{140}{3}\%=46\frac{2}{3}\%.$$

Ответ: на $46\frac{2}{3}\%$

Задача 24

Стоимость товара была на 25% повышена. 40% новой стоимости составляет 12 рублей.

Чему равна первоначальная стоимость товара?

Решение.

Пусть первоначальная стоимость товара была х рублей, тогда после повышения стоимости товара на 25% цена стала 1,25х. Известно, что 40% новой стоимости составляет 12 рублей. Получаем: $1,25x\*40\%=12; 1.25x\*0.4=12; 0.5x=12; x=24.$

Ответ: первоначальная стоимость товара – 24 рубля.

Задача 25

В зоопарке 80% животных – коричневые, 60% коричневых животных – без хвоста. Все коричневые животные с хвостом – кенгуру (других кенгуру нет). В зоопарке 8 кенгуру.

Сколько там всего животных?

Решение.

Пусть кенгуру составляют 40% коричневых животных. Кенгуру всего 8, значит, всего коричневых животных $8/40\*100=20$. В зоопарке 80% коричневых животных, значит, всего животных в зоопарке будет $20:0,8=25$.

Ответ: 25.

Задача 26

Содержание сахара в одном соке – 10%, а в другом – 15%. Смешали 2 л первого и 3 л второго соков.

Каково содержание сахара в смеси?

Решение.

В первом соке содержится $0,1\*2=0,2$ литра сахара, а во втором соке содержится $0,15\*3=0,45$ литра сахара. Тогда в получившейся смеси будет $0,2+0,45=0,65$ литров сахара. Общий объем равен 5 литрам. Тогда процентное содержание сахара в смеси равно $\frac{0,65}{5}\*100\%=13\%.$

Ответ: 13%

Задача 27

В бутылке с 20г 72%-ой уксусной эссенции добавили 140г воды. Каково процентное содержание уксусной кислоты в получившемся растворе?

Решение.

В начальном растворе было 20\*0,72=14,4г уксусной кислоты, столько же осталось и в конечном. Раствора стало в итоге 20+140 =160г. Процентное содержание уксусной кислоты в получившемся растворе 14,4-160= 0,09=9%

Ответ: 9%

Задача 28

Сколько 90%-ной и 60%-ной серной кислоты надо взять, чтобы получить 5,4 кг 80%-ной серной кислоты?

Решение.

Если 90%-ного раствора взяли х кг, то 60%-ного раствора взяли (5,4-х)кг. Чистой серной кислоты в первом растворе содержится 0,9х кг, во втором - 0,6(5,4 – х) кг. В смеси чистой серной кислоты 0,8\*5,4 = 4,32 кг.

0,9х + 0,6(5,4 –х) = 4,32.

Ответ: 3,6кг и 1,8кг.

Задача 29

Во время стирки материя садится на 1/16 по длине и на 1/18 по ширине. Сколько метров ткани шириной 0,9м нужно купить, чтобы после стирки иметь 51 кв. м?

Решение.

Пусть нужно купить х метров ткани шириной 0,9м. Тогда 0,9х(1-1/16)(1-1/18)=51

Ответ: 64 метра.

**Тема 3. ДЕЛИМОСТЬ.**

Задача 1

Имеются 5 листов бумаги. Некоторые из них порвали на 5 кусков каждый. Некоторые из полившихся кусков на 5 частей и. т.д.

Можно ли, продолжая эту операцию, получить 2008 листов?

Решение.

Если мы разбиваем любой листок на 5 кусков, то прибавляется 4 новых куска. Всего количество кусков будет: 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + … .

Если посмотреть количество вновь появившихся кусков, то получаем, 2008 – 5 = 2003. Число 2003 не делится на 4, поэтому получить 2008 листов невозможно.

Ответ: невозможно

Задача 2

Из чисел от 1 до 252 выбросили все числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 5, и все числа, делящиеся на 5, но не делящиеся на 2.

Сколько осталось чисел?

Решение.

В каждом десятке останется по 5 чисел. Но до 250 всего 25 десятков. Получаем 25 \* 5 =125.

Ещё остаются два числа: 251, 252. Из них вычеркивается число 252.

Всего осталось 25 \* 5 + 1 = 126 (чисел).

Ответ: 126 чисел

Задача 3

Может ли сумма двух последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Решение.

Для утвердительного ответа на этот вопрос достаточно придумать пример, 1 + 2 = 3, где три – простое число.

Ответ: может.

Задача 4

Кузнечик прыгает по прямой каждый раз в одном из двух направлений, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй – на 2 см, в третий – на 3 см и т. д. Докажите что после 1985 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Решение.

Так как сумма ± 1 ± 2 ± … ± 1985 содержит нечетное число нечетных слагаемых, то результат будет нечетным. Для того чтобы он оказался там где начинал, нужно, чтобы эта сумма была равна 0.

Задача 5

Докажите, что произведение любых трех последовательных чисел делится на 6.

Решение.

Среди трех последовательных чисел есть как минимум одно четное и одно, делящееся на 3. Значит, их произведение разделится на 6.

Задача 6

Квадрат натурального числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найдите его

Решение.

Квадрат числа не может оканчиваться цифрами 2 или 3, или одним нулем. Значит, последняя цифра равна 5, тогда цифра десятков равна 2. Следовательно. Искомое число 3025

Ответ: 55

Задача 7

На конференции собрались марсиане, у каждого было по 7 конечностей, и земляне, у которых было по 4 конечности. Сколько было землян, если всего было 53 конечности?

Решение.

7х +4у =53, у = (53-7х)/4, у=13-2х+(х+1)/4, х+1 делится на 4, иначе у не будет целым. Но х <53: 7, т.е. х< 8. Значит, х = 3(у=8) или х=7(у=1). Землян 8 или 1

Ответ: 8 или 1.

Задача 8

7,\*,\*,\*,\*,\*,\*,9. Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20.

Решение.

Рассмотрим две соседние суммы «7аб» и «аб?», вместо ? должна стоять цифра 7. Аналогично для двух последних сумм, 4-я цифра с конца получается 9.

Ответ: 79479479

Задача 9

Докажите, что натуральное число, состоящее из 30 единиц и какого- то количества нулей, не может быть полным квадратом.

Решение.

Сумма цифр числа-30, значит, число делится на 3, но не делится на 9. Но полный квадрат делился бы на 9.

Задача 10

Какое наименьшее натуральное N такое, что N! делится на 770?

Решение.

770=7\*11\*10, значит, N! делится на 11. Наименьшее выражение, содержащее множитель 11, будет 11!, в это произведение будут входить и 7, и10.

Задача 11

Докажите, что среди любых шести чисел есть два, разность которых делится на 5.

Решение.

Рассмотрим остатки при делении на 5. Их может быть 5 видов. Чисел 6, значит, среди них найдутся хотя бы два с равными остатками. Их разность разделится на 5.

Задача 12

В строку вписано 5 натуральных последовательных чисел. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких стоящих рядом чисел делится на 5.

Решение.

При делении на 5 остатки: 0,1,2,3,4. Значит, одно из пяти чисел имеет остаток 0, а значит, делится на 5.

Задача 13.

Вовочка написал в тетради число 65349\*0712 в качестве примера числа, которое делится: **а)** на 9; **б)** на 3. (На месте звёздочки когда-то была написана цифра, а теперь там пятно от сладкого чая.) Помогите Вовочке восстановить пропущенную цифру. Укажите все возможные варианты!

**Решение.**

Сумма известных цифр числа равна 37.

a) Чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы его сумма цифр делилась на 9. Это возможно, только если на месте звёздочки стоит цифра 8.

б) Чтобы число делилось на 3, нужно, чтобы его сумма цифр делилась на 3. Это возможно, только если на месте звездочки стоит одна из цифр 2, 5, 8.

**Ответ.** а) 8; б) 2, 5 или 8.

Задача 14.

Запишем подряд цифры от 1 до 9, получим число 123456789. Простое оно или составное? Изменится ли ответ в задаче, если каким-то образом поменять порядок цифр в этом числе?

**Решение.** Легко проверить, что сумма цифр этого числа равна 45 и делится на 9. Значит, в силу признака делимости на 9 и само число делится на 9 и потому составное. При любой перестановке цифр числа сумма этих цифр не изменяется, поэтому число будет по-прежнему делиться на 9 (а значит, будет составным).

**Ответ.** Составное; не изменится.

Задача 15.

 Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу:

а)с помощью признака делимости на 4;

б)с помощью признака делимости на 3.

**Решение.**

а) Число оканчивается на 98, а 98 не делится на 4. Поэтому по признаку делимости на 4 число на делится на 4. Но любое число, делящееся на 12, должно делиться и на 4.

б) Сумма цифр числа равна 40, а 40 не делится на 3. Поэтому по признаку делимости на 3 число на делится на 3. Но любое число, делящееся на 12, должно делиться и на 3.

**Ответ.** Не делится.

Задвча 16.

Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника?

**Решение.**

У Тани есть следующая выигрышная стратегия: после очередного хода Даши она должна дописать к числу такую цифру, чтобы в результате сумма цифр числа делилась на 3. Это всегда можно сделать (более того, для этого Тане достаточно использовать цифры 0, 1 и 2). Тогда после каждого хода Тани (в том числе после последнего) написанное на доске число будет делиться на 3, и Таня выиграет.

**Упражнение.** Попробуйте доказать, что Тане для выигрыша достаточно правильно сделать последний ход (независимо от её предыдущих ходов).

**Ответ.** Таня.

Задача 17.
В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

**Решение.** Город 9 соединён авиалиниями только с городами 3 и 6, а города 3 и 6 соединены только между собой и с городом 9. (Это можно проверить непосредственно, а можно упростить проверку, пользуясь признаком делимости на 3.) Поэтому от города 9 нельзя добраться до города 1. Стало быть, невозможно добраться и из города 1 в город 9.

**Ответ.** Нельзя.

Задача 18.

Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4. Какой код может открывать сейф?

**Решение.**

В силу признака делимости на 4 код может оканчиваться только цифрами 32 (другие двузначные числа, составленные из цифр 2 и 3, не делятся на 4).

Двоек в коде больше, чем троек; значит, двоек не меньше четырёх, а троек не больше трёх. Если в коде четыре двойки и три тройки, то сумма цифр кода равна 2 · 4 + 3 · 3 = 17 и не делится на 3, поэтому и сам код не делится на 3. По аналогичной причине код не может состоять из пяти двоек и двух троек (тогда сумма цифр была бы равна 2 · 5 + 3 · 2 = 16). Значит, код может состоять только из одной тройки и шести двоек (тогда сумма цифр равна 2 · 6 + 3 · 1 = 15 и код делится на 3).

Положение единственной тройки в коде мы уже определили, а остальные цифры · двойки. Значит, подходит только код 2222232.

**Ответ.** 2222232

Задача 19.

Замените звездочки в записи числа 72\*4\* цифрами так, чтобы это число делилось на 45. Укажите все возможные варианты!

**Решение.**

Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 9 (докажите это с помощью основной теоремы арифметики). Чтобы число делилось на 5, последняя цифра должна быть равна 0 или 5.

Пусть последняя цифра числа равна 0, тогда сумма известных нам цифр числа равна 7 + 2 + 4 + 0 = 13. Чтобы число делилось также и на 9, нужно дополнить сумму цифр до числа, кратного 9. Это удастся сделать, только если взять в качестве третьей цифры числа цифру 5. Этот случай даёт нам число 72540.

Пусть теперь последняя цифра числа равна 5, тогда сумма известных нам цифр числа равна 7 + 2 + 4 + 5 = 18 и уже делится на 9. Чтобы число делилось также и на 9, нужно, чтобы после дописывания ещё одной цифры сумма цифр числа по-прежнему была кратна 9. Это условие будет выполнено, только если взять в качестве третьей цифры числа цифру 0 или цифру 9. Таким образом, этот случай даёт нам ещё два числа: 72045 и 72945.

**Ответ.** 72540, 72045, 72945.

Задача 20.

а)Докажите, что произведение двух последовательных чётных чисел всегда делится на 8.

б)Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 116?

**Решение.**

а) Из двух последовательных чётных чисел одно к тому же обязательно делится на 4 (докажите это аккуратно, пользуясь признаком делимости на 4), поэтому их произведение делится на 8.

б) Среди четырёх последовательных натуральных чисел всегда будут два последовательных чётных числа, так что их произведение должно делиться на 8 по пункту а. А число 116 не делится на 8. Значит, оно не может быть образовано тремя последними цифрами числа, делящегося на 8.

**Ответ.** б) Не может.

Задача 21.
Докажите, что из любых семи различных цифр можно составить число, которое делится на четыре.

**Решение.**

Достаточно доказать, что среди любых 7 различных цифр найдутся две, из которых можно составить число, кратное 4. Тогда это число можно будет поставить в конец числа, а остальные цифры расставить в произвольном порядке перед ними. Полученное число будет делиться на 4 в силу признака делимости на 4.

Среди 7 различных цифр обязательно найдутся по крайней мере две чётных (иначе среди них было бы по крайней мере 6 нечётных цифр, а нечётных цифр всего 5). Числа, кратные 4, можно составить из «хороших» пар чётных цифр (0, 2), (0, 4), (0, 6), (0, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 6), (4, 8) и (6, 8). Остаётся ещё «плохая» пара (2, 6). Если других чётных цифр в наборе нет, то в нём должны содержаться все нечётные цифры (в том числе 1). Тогда, используя имеющиеся в наборе в этом случае цифры 1 и 6, можно составить число 16, кратное 4. Если же в наборе есть другие чётные цифры, то есть по крайней мере одна из «хороших» пар чётных цифр, а этот случай рассмотрен выше.

Задача 22.

Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704?

**Решение.**

Если число делится на 3, то в силу признака делимости и его сумма цифр делится на 3. Тогда произведение числа и суммы его цифр делится на 9. Если же число не делится на 3, то и сумма его цифр не делится на 3, значит, и произведение числа и суммы его цифр не делится на 3.

Таким образом, произведение числа на сумму его цифр либо делится на 9, либо не делится на 3. А число 4704 делится на 3, но не делится на 9.

**Упражнение.** В условии задачи не сказано, что число должно быть целым. Проверьте, что ответ останется тем же и для дробных чисел, записанных при помощи конечных десятичных дробей.

**Ответ.** Не может.

Задача 23.

Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа?

**Решение.**

Сумма цифр числа, составленного из таких цифр, равна 10 · 0 + 10 · 1 + 10 · 2 = 30. Значит, в силу признаков делимости это число делится на 3, но не делится на 9.

Предположим, что искомое число *m* является квадратом числа *n*, то есть *m* = *n*2 = *n* · *n*. Если *m* кратно 3, то и *n* кратно 3, а тогда *m* = *n* · *n* должно быть кратно 9.

**Ответ.** Не может.

Задача 24.

Натуральное число В обладает следующим свойством: для любого числа A, которое делится на В, на В также делятся и все числа, полученные из А перестановкой цифр. Докажите, что В может быть равно только 1, 3 или 9.

**Решение.** Пусть число В — k-значное. Тогда среди чисел от 10k+1 до 10k+1+B ровно одно число делится на B. Пусть это число имеет вид 10mkmk-1...m1 (в этом решении такая запись означает не произведение нескольких чисел, а одно число, состоящее из цифр 1, 0, mk, mk-1, ..., m1). Раз делимость на В не зависит от порядка цифр числа, то на В делятся также числа mkmk-1...m110 и mkmk-1...m101. Значит, и разность этих двух чисел, равная 9, должна делиться на В. А это возможно только при В = 1, В = 3 или В = 9.

**Тема 4. НЕКОТОРЫЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

**Введение вспомогательной неизвестной**

Задача 1

Вычислить наиболее удобным способом

 $96×\frac{7}{125}+97×\frac{11}{125}-\frac{2}{125}-192×\frac{9}{125}$

Решение.

Указание: $\frac{9}{125}=a, \frac{2}{125}=b.$

Ответ: 9/125.

Задача 2

Вычислить: 2379 × 23782378 – 2378 × 23792379

Решение.

Ввести обозначения 2378 = х. Тогда 2379 = х + 1, 23782378 = 10000 х + х, 23792379 = 10000 (х + 1) + х + 1

Ответ: 0

Задача 3

Вычислить значение выражения

$$3\frac{1}{117}×4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}×5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}$$

Ответ: $\frac{10}{117}$

**Перебор**

Задача 1

Сколько имеется двузначных чисел, у которых а) среди цифр есть хоть одна пятерка? б) цифра десятков меньше цифры единиц? в) цифра десятков больше цифры единиц?

Ответ: а) 18; б) 36; в) 45

Задача 2

Среди трехзначных чисел, выражающих количество изделий, изготовленных каждой из соревнующихся бригад, нет одинаковых, но в каждом из них сумма цифр равна 4. Какое наибольшее число бригад могло быть? Сколько изделий изготовила каждая из них?

Решение

Всего имеется 10 чисел, удовлетворяющих условию: 400, 301, 310, 130, 103, 202, 220, 211, 121, 112, по этому наибольшее число бригад 10.

Ответ: 10.

Задача 3

Найдите двузначное число, у которого произведение цифр равно наибольшему однозначному числу и числу десятков меньше числа единиц.

Ответ: 19

Задача 4

Количество учащихся одной из школ выражается трехзначным числом. Если найти сумму цифр этого числа, затем сумму цифр полученного числа, то все эти числа можно записать так: АВА, ВС, В, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры. Сколько учеников в этой школе?

Ответ: В = 2, ВС = 20, АВА = 929

Задача 5

Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1 392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Решение.

На нумерацию страниц 1–9 идет по одной цифре, страниц 10-99 – по две цифры, страниц 100-500 – по три цифры, причем 1 × 9 + 2 × 90 + 3 × 401 = 1392. Значит, в книге 9 + 90 + 401 = 500 страниц.

Ответ: 500 страниц.

Задача 6

В числе 48352 зачеркните такие две цифры, чтобы число, образованное оставшимися цифрами в том же порядке, было а) наибольшим, б) наименьшим.

Ответ: а) 852 б) 352.

Задача 7

Расплатившись за купленную книгу, Петя получил сдачу 25 к. Укажите все возможные наборы монет по 2 к. и 3 к., которые мог получить Петя.

Решение.

Монет по 3 коп. должно быть нечетное число. 3 + 2 × 11 = 25, 3 × 3 + 2 × 8 = 25, 5 × 3 + 2 × 5 = 25, 7 × 3 + 2 × 2 = 25. Взять 9 или больше монет по 3 копейки нельзя, так как их сумма будет больше 25 коп. Следовательно, всего возможны 4 набора.

Ответ: 4

Задача 8

Лиса наловила 28 окуней и разложила их в 7 кучек так, что во всех кучках было разное число рыб. Попробуйте и вы так разложить.

Ответ: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28

Задача 9

Напишите девять цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Не меняя порядка этих цифр, расставьте между ними плюсы и минусы, всего три знака, таким образом, чтобы в результате получилось 100.

Ответ: 123 – 45 – 67 + 89 = 100

Задача 10

Распределите числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 на две группы так, чтобы сумма двух любых чисел в одной группе не была равна никакому числу второй.

Ответ: 2, 3, 5, 7, 8 и 4, 6.

**Контрольный и подтверждающий пример**

Задача 1

Верно ли, что если произведение двух натуральных чисел больше 100, то каждое число больше 10?

Ответ: Нет. Например: 8 × 13 = 104 > 100, но 8 < 10

Задача 2

Можно ли число 45 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы произведение всех этих чисел тоже было равно 45?

Ответ: Да, можно. Например: 45 = 15 + 3 + 1 + 1 + … + 1 = 15 × 3 × 1 × 1 × … × 1. 27 единиц

Задача 3

Можно ли число 64 представить в виде суммы трех простых чисел?

Ответ: Да, можно. Например: 64 = 19 + 43 + 2

Задача 4

Может ли произведение двух дробных чисел быть целым числом?

Ответ: Да. Например: 3/4 \* 8/3 = 2.

Задача 5

Можно ли написать подряд 17 целых чисел так, чтобы произведение любых четырех соседних чисел было отрицательно, а произведение всех чисел положительно?

Ответ: Да, можно. Например: 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2, 2, 2, -3, 2.

**Перефразирование**

Задача 1

Во сколько раз больше число, выраженное девятью единицами шестого разряда, чем число, выраженное тремя единицами второго разряда?

Ответ: в 30 000 раз.

Задача 2

За кухонный гарнитур заплатили сначала 41600 рублей, а затем еще половину стоимости этого гарнитура. Сколько стоит кухонный гарнитур?

Решение.

Перефразируем задачу так: «Какова стоимость кухонного гарнитура, если ее половина равна 41600 рублей?»

Ответ: 83200 рублей.

Задача 3

Один из двух множителей равен 12. Как изменится произведение, если второй множитель увеличить на 5?

Решение.

Перефразируем задачу так: «Что больше и на сколько 12а или 12\*(а+5)?»

Ответ: увеличится на 60.

Задача 4

Ученики одного класса в течении 7 месяцев собирали деньги для поездки на экскурсию. Было собрано 640 р. 1 к. Сколько учеников было в классе и сколько каждый вносил ежемесячно, если эти взносы были одинаковыми?

Решение

Так как каждый месяц учащиеся вносили 64 001 : 7 = 9 143 коп, то число 9 143 является произведением числа учеников класса на ежемесячный взнос. Существуют лишь две возможности представления числа 9 143 в виде произведения натуральных чисел: 9 143 = 9 143 × 1 и 9 143 = 223 × 41. Исходя из условия задачи, получаем, что в классе 41 ученик и каждый вносил ежемесячно 2 р. 23 к.

Задача 5

Семь рыбаков ловили рыбу на озере. Первый рыбачил каждый день, второй – через день, третий – через 2 дня и т.д., седьмой – через 6 дней. Сегодня все рыбаки на озере. Через сколько дней все 7 рыбаков снова соберутся вместе на озере?

Ответ: 420 дней.

**Тема 5. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ**

**Задачи на разрезание и подсчет числа фигур**

Задача 1

Разделите квадрат 5 \* 5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

Решение.

Так как всего в квадрате остается 24 клетки, а надо разделить исходную фигуру на четыре равные части, то каждая из частей будет содержать по 6 клеток. Рассмотрим, какие фигуры можно получить из 6 клеток (рис.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |  |
|   |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |   |   |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |
|   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |   |  |   |  |  |   |  |  |   |  |   |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |   |   |  |   |  |  |  |  |  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |   |  |  |  |
|  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
|  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |   |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |   |   |   |  |   |   |   |
|  |  |  |   |  |  |  |   |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |   |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |   |   |   |  |
|  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |  |  |
|   |   |  |   |  |   |  |  |  |  |  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |  |   |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |   |  |  |  |  |   |  |  |  |  |
|  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |   |  |  |  |   |   |   |  |  |   |   |   |  |  |
|   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |  |   |   |  |  |  |  |  |   |   |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |  |   |   |  |
|   |   |   |  |  |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |
|  |  |   |   |  |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |  |   |  |  |   |   |  |  |  |

Располагая по-разному выделенные нами фигуры в квадрате 5 \* 5, получим следующие 7 способов (они показаны на рис.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |

Задача 2

Можно ли прямоугольник 35х23 клетки разрезать без остатка на прямоугольники размером 8х9? Если можно, то как? Если нет, то почему?

Ответ: Нет, так как число 23 нельзя представить в виде суммы пятерок и семерок.

Задача 3.

Прямоугольник разрезали по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке А (рис.).

Получили две равные фигуры. Как это сделали?

 А

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Решение.

Вариант разрезания показан на рис.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Задача 4

Как разрезать квадрат 4\*4 прямыми линиями так, чтобы из полученных частей можно было составить 32 равных квадрата? Не разрешается оставлять неиспользованные части, а также накладывать их друг на друга.

Решение.

Сначала квадрат 4\*4 разрежем на 16 квадратов 1\*1, затем каждый из полученных квадратов разрежем по диагонали на 4 треугольника, из которых, прикладывая большие стороны 2-х треугольников друг к другу, можно получить по 2 квадрата (рис.).



Задача 5

Как разрезать квадрат 5\*5 на 7 прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

Решение.

Пример решения на рис.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 4 | 5 |
| 6 |
| 2 | 7 |
| 3 |

Задача 6

Разрежьте квадрат 5\*5 на 10 одинаковых четырехугольников, не являющихся прямоугольниками.

Решение.

Сначала разрежем квадрат на 5 прямоугольников размером 1\*5. Затем каждый такой прямоугольник разрежем по диагонали среднего квадратика (рис.).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Задача 7

Разрежьте каждую из фигур на три равные части (рис ). Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равными и по площади, и по форме.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |   |   |   |   |  |  |   |  |  |  |   |  |  |  |  |
|  |  |  |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |
|  |  |  |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|  |  |  |   |   |   |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | а |  |  |  |  |  |  | б |  |  |  |  |  |  |

Решение.

 Способы разрезания показаны на рис

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |  |

 а б

Задача 8

Разрежьте фигуру на 2 равные части (рис.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |

Решение.

 См. рис

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |

Задача 9

Разрежьте фигуру, полученную из квадрата 7\*7 вырезанием четырех угловых клеток 1\*1 (рис.1 ), на уголки вида

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |   |  |  |
|   |  |  |   |  |  |
|   |   | и |   |   |   |

(уголки состоят из квадратиков размера 1\*1) так, чтобы квадратики, отмеченные на рисунке, оказались только в больших уголках.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Рис.1

Решение.

Пример разрезания показан на рис.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |   |   |   |   |   |  |
|   |   |   |   |   |  |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |  |

Задача 10

Разрежьте квадрат на три части, из которых можно было бы сложить треугольник с тремя острыми углами и различными сторонами.

Решение.

Решение задачи представлено на рис., где ABCD – исходный квадрат, а AKD – полученный треугольник.



Задача 11

 Сколько треугольников изображено на рис.?



Решение.

 Подсчет треугольников начнем с тех треугольников, которые не разбиты на другие треугольники. Таких треугольников будет по 3 в каждом квадрате, то есть 6.

Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 2 треугольников. В каждом квадрате таких треугольников будет по 3, итого их 6. Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 3 фигур (2-х треугольников и 1 четырехугольника), всего их будет 2. И наконец, подсчитаем число треугольников, содержащих по 4 фигуры: это будет 2 самых больших треугольника, получающихся от деления прямоугольника на 2 части. Таким образом, всего получается 16 треугольников.

Задача 12

 Рост Буратино 1 метр, а длина его носа раньше была 9 сантиметров. Каждый раз, когда Буратино врал, длина его носа удваивалась. Как только нос стал длиннее самого Буратино, тот врать прекратил. Сколько раз Буратино соврал?

Ответ: Буратино соврал 4 раза.

Задача 13

 На рис. изображено 13 точек. Сколько квадратов с вершинами в этих точках можно нарисовать? (Точки располагаются в вершинах квадратиков со стороной 1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ответ: 11 (см. рис.).



Задача 14

 Из 26 спичек длиной по 5 см сложили прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь?

Решение.

 Использовать перебор, наибольшая площадь будет у прямоугольника, стороны которого состоят из 6 и 7 спичек.

Ответ: 1050 см2

Задача 15

 У Коли есть фанерный прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см и карандаш. Разрешается прикладывать прямоугольник к бумаге и обводить его (полностью или частично) карандашом. Любые другие действия (например, делать пометки на фанере) запрещены. Как Коле, не нарушая запрета, нарисовать квадрат со стороной 1 см? Опишите, что он должен делать и в каком порядке.

Решение.

 Четырежды приложив шаблон, нарисуем прямоугольники размерами 5\*6 и 6\*5, расположенные, как показано на рис. Осталось, пользуясь стороной фанерного прямоугольника как линейкой, продолжить их стороны, чтобы в правом верхнем углу образовался квадрат со стороной 1.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |

Задача 16

 Прямоугольный параллелепипед покрасили со всех сторон и разрезали на 24 единичных кубика. У 12 кубиков оказались покрашены по 2 грани. Каковы размеры параллелепипеда?

Решение.

 Имеется 4 случая разложения числа 24 на 3 множителя: 24=2\*2\*6=2\*3\*4=2\*1\*12=1\*1\*24. Рассматривая эти случаи, получаем, что параллелепипед имеет размеры 2\*3\*4.

Ответ: 2 \*3\* 4.

Задача 17

 Коробка из-под игрушки имеет форму параллелепипеда. Площадь верхней ее грани равна 6 дм2, площадь передней грани – 2,5 дм2, площадь боковой грани – 2,4 дм2. Найдите объем коробки.

Решение.

 Обозначим длину коробки за a, ширину – за b, а высоту – за c. Тогда, учитывая условие, получим, что ab = 6, ac = 2,5, bc = 2,4. Перемножив эти три равенства, получим, что

a2b2c2 = 36.

Но a2b2c2 = (abc)2 – квадрат объема коробки. Поэтому объем коробки равен 6 дм3.

Ответ: 6

Задача 18

 Из 18 одинаковых кубиков сложили прямоугольный параллелепипед высотой в три кубика. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь поверхности одного кубика равна 19 см2.

Решение.

 Возможны 2 варианта параллелепипеда, построенного из 18 кубиков высотой в 3 кубика: 3\*3\*2 и 3\*6\*1. Площади поверхности этих параллелепипедов будут равны 42 и 54 площадей одной грани. Учитывая, что площадь грани равна 19/6 см2, получим площади поверхности для построенных параллелепипедов: 133 см2 и 171 см2.

Ответ: 133, 171.

Задача 19

 Как разделить круг тремя прямыми на 4, 5, 6, 7 частей?

Решение.

 См. рис.



Задача 20

 Разбейте квадрат на 5 треугольников таким образом, чтобы площадь одного из них равнялась сумме площадей остальных треугольников.

Решение.

 Возможное разбиение приведено на рис.



Задача 21

 Тетрадный лист бумаги сложили пополам 5 раз, каждый раз меняя направление сгиба. Затем отрезали от полученного прямоугольника 4 угла и лист развернули. Сколько дырок внутри листа оказалось?

Решение.

 После первого разворачивания дырок внутри не будет, после второго разворачивания окажется одна дырка в середине. Развернув третий раз, мы получим уже 3 дырки, а после четвертого – уже 9. Таким образом, развернув лист последний раз, мы получим 21 дырку.

Ответ: 21.

Задача 22

 Расположите изображенные на рис. два острых угла таким образом, чтобы образовались четыре тупых угла.

Решение.

 На рис. углы AOC, AOD, BOC, BOD – тупые.



Задача 23

Расположите четыре прямые таким образом, чтобы образовалось 16 прямых углов.

Решение.

Решение на рис.



Задача 24

Сколько треугольников на рис.?



Решение

Начнем с самых маленьких треугольников: их 8. Треугольников площадью в 2 раза больше – 14. Треугольников площадью в 3 раза больше самого маленького треугольника – 4 (они прямоугольные). Наконец, самых больших треугольников – 2. Итого, всего 28 треугольников.

Ответ: 28.

 Задача 25

 Сколько различных по величине углов изображено на рис.?



Ответ: 8 углов: 10°, 20°, 30°, 50°, 60°, 80°, 100°, 110°.

Задача 26

Изображенные на рис. фигуры 1, 2, 3 и 4 являются квадратами. При этом периметр первой фигуры равен 16 см. периметр второй – 24 см. Найдите периметр фигуры

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 2 |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 |   |   |   |  |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |  |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |  |   |   | 4 |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   | 3 |   |   |  |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |  |   |   |  |  |   |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |

Решение

Так как периметр первой фигуры равен 16 см, то сторона первого квадрата равна 4 см. Соответственно, сторона второго квадрата будет равна 6 см. Тогда сторона третьего квадрата будет 10 см, а сторона четвертого

10 + 6 = 16 (см).

А это означает, что периметр четвертой фигуры равен 64 см.

Ответ: 64.

Задача 27

Диагональ делит четырехугольник с периметром 26 см на два треугольника с периметрами 22 см и 18 см. Найдите длину этой диагонали.

Решение.

Сумма периметров треугольников дает в итоге сумму периметра четырехугольника и удвоенную длину диагонали. Тогда длина диагонали равна ((22 + 18) – 26) : 2 = 7 (см).

Ответ: 7.

Задача 28

Прямоугольник состоит из двух одинаковых квадратов, имеющих общую сторону. Его периметр равен 18 см. Найдите площадь прямоугольника.

Решение.

Как видно из рис., периметр прямоугольника складывается из 6 сторон квадрата, поэтому его сторона равна 18 : 6 = 3 (см).

Тогда площадь квадрата будет равна 9 см2, а площадь прямоугольника 18 см2.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Ответ: 18.

Задача 29

Сколько треугольников на рис.?



Решение.

13 треугольников: 6 – маленьких, 4 – состоят из 2 маленьких треугольников, 2 прямоугольных – состоят из 3 треугольников, 1 – большой, включающий в себя 6 маленьких треугольников.

Ответ: 13.

Задача 30

От каждой вершины деревянного куба отпилили по одинаковому кусочку так, что место спила имеет форму треугольника. Сколько вершин и сколько ребер у получившегося тела?

Ответ: 24 вершины и 36 ребер

Задача 31

 Разрежьте прямоугольник на 3 треугольника таким образом, чтобы среди полученных треугольников лишь 1 был прямоугольный.

Решение.

 См. рис.



Задача 32

Может ли прямая пересечь все стороны 13-угольника ровно по 1 разу (не проходя через вершины)

Решение.

Если мы будем двигаться по прямой, не проходящей через вершины, то мы войдем внутрь многоугольника столько же раз, сколько выйдем из него. Общее число пересеченных сторон будет четным. Всего сторон 13, значит, прямая пересечет не все стороны.

Ответ: не может.

**6 класс**

Задача 1

 Длина ребра куба – 0,5 м. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из которых равна 2 мм. Затем кубики уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

Решение.

 Так как 0,5 м = 50 см = 500 мм, то грань можно разрезать на 500 : 2 = 250 (частей). Разрезав, таким образом куб в трех плоскостях, получим 250 \* 250 \* 250 = 15 625 000. Так как длина ребра кубика равна 2 мм, то длина ряда будет 15 625 000 \* 2 мм = 31 250 000 мм = 31,25 км.

Ответ: 31,25 км.

Задача 2

Участок, засаженный клубникой, имеет форму прямоугольника, длина которого в 3 раза больше ширины. Участок окружен оградой, которая отстоит от сторон участка на 2 м. Площадь, ограниченная оградой, на 128 м2 больше площади самого участка. Определите длину ограды.

Решение.

 Рассмотрим арифметический способ решения задачи. Пусть ABCD – участок под клубникой, AB = х, BD = 3х (рис. ).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | х | х | х |  |
| хA | B |  |  | DC |
|  |  |  |  |  |

 2м

1) 2 \* 2 = 4 (м2) – площадь каждого из заштрихованных квадратов.

2) 4 \* 4 = 16 (м2) – площадь четырех угловых заштрихованных квадратов.

3) 128 – 16 = 112 (м2) – площадь оставшейся части участка внутри ограды (без угловых квадратов, см. рис. 64), она представляет собой 8 прямоугольников с шириной 2 м и длиной х.

4) 112 : 8 = 14 (м2) – площадь одного из прямоугольников.

5) х = 14 : 2 = 7 (м) – длина этого прямоугольника, эта же ширина участка, занятого клубникой.

6) 7 \* 3 = 21 (м) – длина участка, занятого клубникой.

7) 7 + 2 + 2 = 11 (м) – длина меньшей стороны ограды.

8) 21 + 2 + 2 = 25 (м) – длина большей стороны ограды.

9) (11 + 25) \* 2 = 72 (м) – длина всей ограды

Ответ: 72 м.

Задача 3

На рис. имеется квадрат со стороной 1. Из двух противоположных вершин квадрата проведено две дуги так, как показано на рисунке. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Решение.

 Площадь четверти круга с радиусом 1 равна π/4. Тогда площадь квадрата без четверти данного круга будет равна 1 - π/4. Площадь двух таких частей равна 2 - π/2. Тогда площадь заштрихованной части равняется разности площади квадрата и площади данных двух частей, то есть

1 – (2 - π/2) = π/2 – 1.

Ответ: π/2 – 1.

Задача 4

 Можно ли из фигурок, изображенных на рис., сложить квадрат? Фигурки можно брать в неограниченном количестве.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |

Решение.

 Из данных фигурок сначала можно сложить прямоугольник 2х5, как показано слева на рис., а затем, из 10 прямоугольников 2х5 сложить квадрат 10х10, он изображен на рисунке справа

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |
|    |   |   |   |   |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

Задача 5

На каждой стороне квадрата со стороной 1 построено по полуокружности, как показано на рис. Найдите площадь заштрихованной части (четырех лепестков).



Решение.

 Площадь круга с радиусом, равным 1/2, будет равна π/4, а полукруга с этим же радиусом - π/8. Тогда площадь двух таких полукругов будет равна π/4. Так как площадь квадрата равна 1, то площадь двух не заштрихованных участков квадрата будет равна 1 - π/4. Значит, площадь четырех не заштрихованных участков будет равна 2 - π/2. Поэтому площадь заштрихованных участков будет равна

1 – ( 2 - π/2) = π/2 – 1.

Ответ: π/2 – 1

Задача 6

С центром в вершинах квадрата проведено 4 дуги. Также проведена окружность с центром в середине квадрата. Найдите площадь заштрихованной фигуры на рис., если сторона квадрата равна 1.



Решение.

Найдем сначала площадь четверти круга с радиусом, равным 1/2, она будет равна π/16. Тогда площадь 4 таких четвертей будет равна π/4. Значит, площадь оставшейся части квадрата равна 1 - π/4. Заштрихованная фигура представляет собой разность круга и этой части. Тогда ее площадь будет равна

π/4 – ( 1 - π/4) = π/2 – 1.

Ответ: π/2 – 1

**Тема 6. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ**

Задача 1

Ира, Даша, Коля и Митя собирали ягоды. Даша собрала ягод больше всех, Ира – не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали ягод больше чем мальчики?

Ответ: да.

Задача 2

Волк и Лиса соревновались в беге. Кто какое место занял, если известно, что Волк был одним из первых, а Лиса была предпоследней?

Ответ: Лиса – первая, Волк – второй.

Задача 3

Катя и Лена собирали грибы. Вместе они собрали на 18 грибов больше, чем Катя, и на 12 грибов больше, чем Лена. Сколько грибов собрала Катя и сколько грибов собрала Лена?

Ответ: Лена собрала 18 грибов, а Катя – 12 грибов.

Задача 4

В квартирах № 1, № 2, и № 3 жили три котенка: белый, черный и рыжий. В квартирах № 1 и № 2 жил не черный котенок. Белый жил не в квартире № 1. В какой квартире жил какой котенок?

Ответ: белый котенок живет в квартире № 2, черный котенок – в квартире № 3, рыжий котенок – в квартире № 1.

Задача 5

Команда провела три матча: один выиграла, один свела вничью, один проиграла, забив три меча и пропустив один. Как закончился (с каким счетом) каждый матч команды?

Ответ: 0 : 1, 0 : 0, 3 : 0.

Задача 6

Катя, Соня, Галя и Тамара родились 2 марта, 17 мая, 2 июля и 20 марта. Соня и Галя родились в одном месяце, а у Гали и Кати день рождения обозначается одинаковыми числами. Кто какого числа и в каком месяце родился?

Ответ: День рождения Кати – 2 июля, Гали 2 марта, Сони – 20 марта, а Тамары – 17 мая.

Задача 7

Три мальчика: Миша, Сережа и Гриша живут в одном подъезде на разных этажах: пятом, седьмом и восьмом. Миша живет не ниже Гриши, а Сережа не выше Гриши. Кто из мальчиков на каком этаже живет?

Ответ: Миша живет на 8 этаже, Гриша – на 7, а Сережа – на 5.

Задача 8

Встретились три товарища: Белов, Рыжов и Чернов. Чернов сказал, что ни у одного из них цвет волос не соответствует своей фамилии. «Правильно!», - ответил Белов. Какого цвета волосы у каждого из них?

Ответ: у Белова волосы рыжие, у Чернова белые, а у Рыжова черные.

Задача 9

В трех ящиках находится крупа, вермишель и сахар. На одном из них написано «Крупа», на другом «Вермишель», на третьем «Крупа или сахар». В каком ящике что находится, если содержимое каждого из них не соответствует надписи?

Ответ: в ящике с надписью «Крупа или сахар» находится вермишель, с надписью «Вермишель» - крупа, с надписью «Крупа» - сахар.

Задача 10

В четырех ящиках лежит по одному шарику: белый, черный, красный и зеленый. На первом ящике надпись «Белый», на втором «Зеленый или белый», на третьем «Красный или зеленый», на четвертом «Черный или зеленый, или красный». Но ни одна надпись не соответствует действительности. Какого цвета шарик лежит в каком ящике?

Ответ: в ящике с надписью «Белый» лежит зеленый шарик; с надписью «Зеленый или белый» - красный шарик; с надписью «Красный или зеленый» - черный шарик; с надписью «Черный или зеленый, или красный» - белый шарик.

Задача 11

На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, решил узнать, куда ведет интересующая его дорога.

Какой вопрос он должен задать встретившемуся ему островитянину?

Решение.

Путешественник должен задать вопрос: « Эта дорога ведет в ваше племя?» Абориген ответит «да», если дорога ведет к его племени, и «нет», если – не к его племени. А пришелец, если дорога ведет к ним , ответит «нет», а если в племя аборигенов, то «да». Таким образом, при ответе «да» дорога будет вести в племя аборигенов, а при ответе «нет» - в племя пришельцев.

**Тема 7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ**

**Задачи на переливание.**

Задача 1

Имеется 2 сосуда – 3 л и 5 л. Нужно, пользуюсь ими, налить 1 л воды.

Решение:

Наполним 3 л, перельем в сосуд 5 л, затем нальем ещё раз 3 л в сосуд и перельем 2 л в сосуд 5 л до полного. В трехлитровом сосуде остался один литр.

Задача 2

Имеются 2 сосуда – 3 л и 5 л. Как с их помощью получить 4 л воды?

Решение:

 1 способ

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сосуд 5 л | 5 л | 2 л | 2 л | - | 5 л | 4 л |
| Сосуд 3 л | - | 3 л | - | 2 л | 2 л | 3 л |

Решение:

2 способ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сосуд 3 л | 3 л | - | 3 л | 1 л | 1 л | - | 3 л | - |
| Сосуд 5 л | - | 3 л | 3 л | 5 л | - | 1 л | 1 л | 4 л |

Задача 3

Имеются 2 сосуда вместимостью 8 л и 5 л. Как с их помощью отмерить 7 л воды?

Решение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сосуд 8 л | - | 5 л | 5 л | 8 л | - | 2 л | 2 л | 7 л |
| Сосуд 5 л | 5 л | - | 5 л | 2 л | 2 л | - | 5 л | - |

Задача 4

Как, имея сосуды 5 л и 7 л, отмерить 6 л воды?

Решение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сосуд 5 л | - | 5 л | - | 2 л | 2 л | 5 л | - | 4 л | 4 л | 5 л |
| Сосуд 7 л | 7 л | 2 л | 2 л | - | 7 л | 4 л | 4 л | - | 7 л | 6 л |

Задача 5

Как с помощью 7-литрового ведра и 3-литровой банки налить в кастрюлю 5 л воды?

Решение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ведро 7 л | 7 л | 4 л | 4 л | 1 л | 1 л | -  | 7 л | 5 л |
| Банка 3 л | - | 3 л | - | 3 л | - | 1 л | 1 л | 3 л |

Задача 6

Имеются сосуды – 17 л и 5 л. Как отмерить 13 л?

Решение:

1-й шаг: налить в сосуд 17 л 3 раза по 5 л, т.е. 15 л.

2-й шаг: наполнить 5-литровый сосуд и 2 литра вылить в сосуд 17 л, там будет 17 л, а в

5-литровом останется 3 л.

3-й шаг: вылить воду из сосуда 17 л, а туда слить 3 л и налить 2 раза по 5 л.

**Задачи на совместную работу**

Задача 1

Воробей склевал горсть пшена за 1 час. Воробьиха склевала горсть пшена 2 часа. Воробушек склевал горсть пшена за 3 часа. Спрашивается, за какое время они бы склевали пшено вместе?

Решение.

Пусть воробей, воробьиха и воробушек склевывают пшено за 6 часов. Воробей склюет 6 горстей пшена, воробьиха 3 горсти пшена, воробушек 2 горсти пшена. Всего 11 горстей пшена

6 : 11 = 6/11 (ч) на 1 горсть пшена

Ответ: 6/11 часа

Задача 2

На птицефабрику привезли корм, которого бы хватило уткам на 30 дней, а гусям на 45 дней. Рассчитайте,

 на сколько хватит привезенного корма и уткам, и гусям вместе.

Решение.

1/30 – всего корма съедают за 1 день все утки

1/45 – всего корма съедают за 1 день все гуси

1/30 + 1/45 = 3/90 + 2/90 = 5/90 = 1/18 – всего корма съедаю за 1 день все утки и гуси вместе

Ответ: на 18 дней

Задача 3

3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 куриц за 12 дней?

Решение.

3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Следовательно, 3 курицы за 12 дней снесут в 4 раза больше яиц, то есть 12 яиц, а 12 кур за 12 дней снесут еще в 4 раза больше яиц, то есть 12 \*4 = 48.

Ответ: 48

Задача 4

Ужасный вирус пожирает память компьютера. За первую секунду он управился с половиной памяти, за вторую секунду – с одной третью оставшейся части, за третью секунду – с четвертью того, что еще сохранилось, за четвертую – с одной пятой остатка. И тут его настиг могучий антивирус. Какая часть памяти уцелела?

Решение.

За 1 секунду уничтожено 1/2 памяти и осталось после 1 секунды 1/2 памяти. За 2 секунду уничтожено 1/2 \*1/3 =1/6. После 2 секунды остается 1/2 -1/6 =1/3 памяти. За 3 секунду уничтожено 1/4 \*1/3=1/12. После 3 секунды останется 1/3 -1/12=1/4. За 4 секунду уничтожено 1/4 \*1/5=1/20. После 4 секунды останется 1/4 -1/20 =1/5

Ответ: 1/5

Задача 5

Три землекопа за 2 часа вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?

Решение.

За 2 часа 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 часов в 2,5 раза больше, то есть 15 ям.

Ответ: 15.

**Задачи на движение**

Задача 1

После того как бегун пробежал треть всей дистанции и еще 400 м, ему осталось пробежать еще треть пути и еще 200 м. Чему равна длина дистанции?

Решение.

Весь путь состоит из (1/3+1/3) пути +200 м+400 м. Значит, 600 м составляет 1/3 пути. Весь путь 600 м \* 3 = 1800 м.

Ответ: 1800 м

Задача 2

Маша доходит до школы и обратно без остановки за 12 минут, а ее брат Миша добегает до школы и обратно без остановки за 8 минут. Во сколько раз скорость Миши больше, чем скорость Маши?

Решение.

Поскольку при одном и том же расстоянии скорости движения обратно пропорциональны затраченному времени, то получаем, что скорость Миши больше, чем скорость Маши, в 1,5 раза

Ответ: 1,5 раза.

Задача 3

Автомобиль прошел АВ со скоростью 40 км/ч и обратно со скоростью 30 км/ч.

Найдите среднюю скорость автомобиля.

 Решение.

Пусть а км – длина пути. Путь АВ автомобиль прошел за а/40 часов, а обратно за а/30 часов.

Общее время в пути (а/40 +а/30) часов, то есть 7а/120 часов. Весь пройденный путь 2а км. Чтобы найти среднюю скорость автомобиля, нужно длину всего пути разделить на общее время. Получаем: 240а/7км/ч – средняя скорость автомобиля.

Ответ: 34 2/7 км/ч.

Задача 4

Собаке нужно 15 секунд, чтобы догнать бегущую кошку, до которой сейчас 10 метров. Кошке нужно 2 секунды, чтобы догнать бегущую мышку, до которой сейчас 6 метров. Сколько времени нужно собаке, если она побежит догонять мышку, до которой сейчас 5,5 м?

Решение.

Скорость сближения собаки и кошки равна 10/15 м/с, то есть 2/3 м/с. Скорость сближения кошки и мышки равна 3 м/с. Значит, скорость сближения собаки и мышки будет 3 м/с +2/3 м/с = 11/3 м/с. Следовательно, собаке нужно, если она побежит догонять мышку, до которой сейчас 5,5 м, времени 5,5\*3/11 = 1,5(с).

Ответ: 1,5 с.

Задача 5

Баба Яга отправилась в гости к Лешему. Первые 4 км пути она прошла пешком, а последние 2 км пролетела в ступе (летит она в 4 раза быстрее, чем идет). На весь путь она затратила 3 часа. На обратном пути, наоборот, первые 4 км она пролетела в ступе, а оставшиеся 2 км прошла пешком.

Сколько времени она затратила на обратный путь?

Решение.

Пусть скорость пешком равна х, тогда скорость полета на ступе 4х. Зная, что на весь путь она затратила 3 часа, то 4/х + 2/4х = 3. Х = 1,5(км/ч). Время на обратный путь будет 4/6 +2/1,5 =2(ч).

Ответ: 2 часа.

Задача 6

Турист 80% пути проехал на велосипеде, 40% оставшегося пути прошел пешком и 12 км проехал.

Найдите весь путь туриста.

Решение.

Пусть весь путь равен х км, тогда по условию задачи получаем: 0,8х + 0,4\*0,2х +12 =х,

0,12х = 12, х =100. Длина пути равна 100 км.

Ответ: 100 км.

Задача 7

Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 секунд и 15 секунд идет мимо телеграфного столба.

Вычислите длину поезда и его скорость.

Решение.

Когда локомотив выезжает с места, то мимо столба у конца моста он будет идти еще 15 секунд. Значит, локомотив проходит мост за 45с- 15с =30с.

450 м : 30 с = 15 м/с – скорость поезда.

15 м/с \* 15 с = 225 м – длина поезда.

Ответ: 225 м, 15 м/с.

Задача 8

Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 60 км/ч, и видит, что мимо окна проходит встречный поезд в течение 4 секунд.

Какова скорость встречного поезда, если его длина равна 120 метрам?

Решение.

(х+ 60) км/ч – скорость сближения.

х +60 = 1,8 \* 60; х = 48.

Ответ: 48 км/ч.

Задача 9

Заяц соревновался с черепахой в беге на 100 метров. Когда заяц прибежал к финишу, черепахе оставалось до него еще 90 метров. На сколько метров надо отодвинуть назад стартовую линию для зайца, чтобы при новой попытке оба бегуна пришли к финишу одновременно?

Решение.

Скорость зайца больше в 100 : 10 = 10 раз. Поэтому пройденный им путь за одно и то же время будет в 10 раз больше. Следовательно, когда черепаха проползет 100 м, заяц пробежит за это время в 10 раз больше, то есть 1000 м, поэтому стартовую линию для зайца, чтобы при новой попытке оба бегуна пришли к финишу одновременно, следует отодвинуть назад на 900 м.

Ответ: 900 м.

Задача 10

Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, смотря в окно.

Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?

Решение.

Пусть пассажиру осталось проехать а км, тогда, смотря в окно, он проехал 2а км.

Половина пути равна 3а км, а весь путь равен 6а км. Следовательно, та часть пути, проезжая которую пассажир смотрел в окно, равна 2а/6а = 1/3.

Ответ: 1/3.

Задача 11

Плот плывет от А до В 40 часов, а катер – 4 часа. Сколько часов катер плывет от В до А?

Решение.

1/4 0 часть проплывает плот за 1 час

1/4 проплывает катер по течению за 1 час

1/4 – 1/40 = 9/40 часть пути проплывает катер в стоячей воде

9/40 – 1/40 = 1/5 часть проплывает катер за 1 час против течения

1 : 1/5 = 5 (ч.).

Ответ: плывет от В до А 5 часов

Задача 12

Пароход идет вниз по течению 2 часа, а вверх 3 часа. Сколько времени между теми же населенными пунктами будет плыть бревно.

Решение:

Vпо = Vс + Vт Vпр = Vс – Vт

Ответ: 12 часов

**Натуральные числа**

Задача 1

Иван живет на улице, дома на которой имеют номера с 1 по 24. Сколько раз при написании этих номеров используется цифра 2?

Решение.

 Выпишем номера, использующие цифру 2: 2,12,20, 21,22, 23, 24. Видим, что цифра 2 используется 8 раз.

Ответ: 8.

Задача 2

На доске в строчку написаны двадцать пятерок. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 1000.

Сколько плюсов поставил Вася?

Решение.

 Понятно , что 5555 и более - слишком много. Если бы все слагаемые были по 55 и 5, то сумма была бы не больше, чем 550 – это слишком мало. Следовательно, должно быть ровно одно слагаемое 555. Остается 17 пятерок, которыми нужно набрать сумму 445, но 445 = 55 \* 8 + 5. Всего 9 плюсов.

Ответ: 9.

Задача 3

Может ли при перемножении двух двузначных чисел получиться четырехзначное число из одинаковых цифр?

Решение.

 Четырехзначное число из одинаковых цифр имеет вид аааа = а\*11 \*101.

Очевидно, что один из множителей данного числа будет 101 – трехзначное число, поэтому при перемножении двух двузначных чисел получиться четырехзначное число из одинаковых цифр не может.

Ответ: не может.

Задача 4

Какова первая цифра в наименьшем натуральном числе, сумма цифр которого равна 2001?

Решение.

 Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию, должно содержать наименьшее число цифр. На конце будем ставить девятки. Если разделить 2001 на 9, то получается остаток 3.

2001= 222\* 9 + 3

Поставив цифру 3 вперед и, приписав 222 девятки, получаем наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2001. Значит, первая цифра 3.

Ответ: 3.

Задача 5

Сколько цифр содержит запись наименьшего натурального числа, которое делиться на 225 и записывается ( в десятичной системе ) только нулями и единицами ?

Решение.

 Число 225 является произведением 25 и 9. Чтобы число делилось на 9, его сумма цифр должна делиться на 9. Значит, в результате должно быть девять единиц.

Чтобы такое число делилось на 25, необходимо справа приписать два нуля. Получаем одиннадцать цифр в числе 11111111100.

Задача 6

Напишите наибольшее пятизначное число, кратное 9, так чтобы первая цифра была 3 и все цифры были различные.

Решение.

Пусть данное число будет 3 \* 9 \* 8 \* 7х. Вставим вторую, третью и четвертую цифры так, чтобы получить наибольшее число 9, 8, 7. 3 + 9 + 8 + 7 = 27. На последнее место можно ставить 0 или9, чтобы число делилось на 9, но 9 уже есть в записи, значит, ставим 0.

Ответ: 39 870.

Задача 7

Напишите в строку 5 чисел, чтобы сумма любых двух соседних была отрицательной, а сумма всех чисел – положительной.

Ответ: например: 3; -4; 3; -4; 3

Задача 8

Света выполнила действия: 1997 \* 1999 \* 2001 – 1998 \* 2000. Какова последняя цифра ответа?

Решение.

Произведение 1997 \* 1999 \* 2001 оканчивается цифрой 3, поскольку 7 \* 9 \* 1 = 63. Произведение 1998 \* 2000 оканчивается тремя нолями . Разность 1997 \* 1999 \* 2001 – 1998 \* 2000 оканчивается на 3.

Ответ: 3

Задача 9

Докажите, что сумма всех натуральных чисел от 1 до 1000 делится на 143.

Решение.

1 + 2 + 3 + … + 998 + 999 + 1000 = 500 \* 1001 = 500 \* 7 \* 11 \* 13 = 3500 \* 143. Произведение 3500 \* 143 делится на 143.

Ответ: делится

Задача 10

По кругу расставлены цифры в произвольном порядке. Цифр 9: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Каждые 3 цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число.

Найдите сумму всех девяти таких трехзначных чисел. Зависит ли она от порядка, в котором расставлены цифры?

Решение.

Каждая цифра а учитывается в сумме трижды:

а + 10а +100а = 111а

s = 111 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 111 \* 45 = 4995.

Ответ: 4995, сумма не зависит от порядка, в котором расставлены здесь цифры.

Задача 11

Коля открыл книгу и обнаружил, что сумма номеров левой и правой страниц – 25.

Чему равно произведение этих номеров?

Решение.

Так как это левая правая страницы, то номер правой на 1 больше номера левой. (25 - 1) : 2 = 12.

Значит, это страница 12 и 13, 12 \* 13 = 156.

Ответ: 156

Задача 12

Какое самое маленькое число, большее 2007, имеет туже сумму цифр, что и 2007, но отличается от 2007 произведением цифр?

Решение.

Сумма цифр данного числа 2 + 0 + 0 + 7 = 9. Произведение искомого числа не может быть равно 0, значит, искомое число не содержит 0. Наименьшее будет иметь вид 2 \* \* \*, где сумма цифр, замененных звездочками, равна 7. Из таких чисел самое маленькое – 115. Получаем 2115.

Ответ: 2115

Задача 13

Найдите сумму всех трехзначных чисел, все цифры которых нечетны.

Решение.

Всего 5 \* 5 \* 5 = 125 чисел

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Сумма всех цифр будет равна 25 \* 25 = 625.

625 \* (100 + 10 + 1) = 625 \* 111 = 69 375

Ответ: 69 375

**Тема 8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ**

**Олимпиада 5 класс**

**Задачи 1 тура**

Задача 1

Вычислите наиболее простым способом: 123456789 × 2007 – 123456788 × 2007.

Решение

123456789 × 2007 – 123456788 × 2007 = (123456789 – 123456788) × 2007 = 1 × 2007 = 2007

Ответ: 2007

Задача 2

Шоколадка состоит из 24 (6 х 4) долек. Сколько разломов потребуется сделать, чтобы разделить её на 24 части? Накладывать части друг на друга не разрешается.

Решение

При каждом разламывании целой шоколадки или любого ее куска на две части число кусков увеличивается на 1. Сначала была 1 шоколадка, в конце станет 24 куска, значит, добавиться 23 куска, т.е. потребуется 23 разлома.

Ответ: 23

Задача 3

Гриша пошел с папой в тир. Уговор был такой: Гриша делает 5 выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать ещё 2 выстрела. Гриша сделал 17 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

Решение

Сначала Гриша сделал 5 выстрелов, потом ещё 17 – 5 = 12 «призовых» выстрелов, которые он получил за 12 : 2 = 6 попаданий

Ответ: 6

Задача 4

В клетках таблицы, содержащей 4 строки и 7 столбцов, расставьте натуральные числа так, чтобы их сумма в каждой строке была равна 28, а в каждом столбце 15. Можно ли осуществить требуемое? Если да, то покажите, как; если нет, то объясните, почему.

Решение

Предположим, что кому-то удалось расставить в клетки таблицы числа согласно условиям задачи. Тогда сумма всех чисел таблицы, подсчитанная по строкам, равна 28 × 4 = 112, а сумма тех же чисел, подсчитанная по столбцам, равна 15 × 7 = 105. Получилось противоречие. Значит, требуемое осуществить нельзя.

**Задачи 2 тура**

Задача 1

Длину прямоугольника уменьшили на 2,4 метра, а ширину увеличили на 30%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась на 4% больше площади старого.

Найдите новую длину прямоугольника.

Ответ: 9,6 метра.

Задача 2

Какой самый маленький результат может получиться, если в выражении 4\*12 – 10/2 – 3 вставить одну пару скобок?

Решение.

4\* (12 – 10 )/2 – 3.

Ответ: 1.

Задача 3

Двое поделили между собой 7 рублей, причем один получил на 3 рубля больше другого.

Сколько кому досталось?

Ответ: 5 и 2.

Задача 4

Выразите число 16 с помощью четырех пятерок, соединяя их знаками действий.

Ответ: 55 : 5 + 5 = 16.

Задача 5

Сколько воды нужно добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-й раствор этой соли?

Решение.

600 \*40 : 100 = 240 (г) – содержится соли в 600 г жидкости;

240 : 12 \* 100 = 2000 (г) – будет 12%-й жидкости;

2000 – 600 = 1400 (г) – воды надо добавить.

Ответ: 1400 г.

**Задачи 3 тура**

Задача 1

Что произойдет с разностью, если уменьшаемое уменьшить на 3, а из вычитаемого вычесть 3?

Ответ: не изменится.

Задача 2

Сколькими нулями заканчивается произведение натуральных чисел 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × … × 100?

Решение.

Среди чисел от 1 до 100 ровно 20 делятся на 5, из них 4 делятся на 5 × 5 = 25. Значит, 24 произведений 2 × 5 дадут 24 нуля.

Ответ: 24

Задача 3

Три утенка и четыре гусенка весят 2 кг 500 г, а четыре утенка и три гусенка весят 2 кг 400 г. Сколько весит 1 гусенок?

Решение.

Запишем коротко условие задачи:

З у + 4 г = 2500

4 у + 3 г = 2400.

Определим вес 7 утят и 7 гусят (4900 г), затем вес 1 утенка и 1 гусенка (700 г), а потом вес 3 утят и 3 гусят (2100 г). Сравнение полученного результата с первым условием показывает, что 1 гусенок весит 400 г.

Ответ: 400 г.

Задача 4

Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 17 км, выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно с ним из А в В вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Велосипедист доехал до В, повернул и поехал назад с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

Решение.

Велосипедист и пешеход сближаются со скоростью 12 + 5 = 17 км/ч с расстояния 34 км, поэтому они встретятся через 34 : 17 = 2 ч.

Ответ: 2 ч.

**Математический бой**

**5 класс**

Задача 1

Выпишете все двузначные числа, у которых первая цифра в 3 раза больше второй.

Ответ: 31, 62, 93.

Задача 2

Восстановите поврежденные записи арифметических действий: ABCD – FEKQ = MECA

Ответ: 6750 – 3894 = 2856.

Задача 3

Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цены часки и блюдца.

Ответ: 13 рублей.

Задача 4

Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.

Ответ: 13.

Задача 5

Сумма пяти последовательных целых чисел равна 875. Найдите эти числа.

Ответ: 173, 174, 175, 176, 177.

**Олимпиада 6 класс**

**Задачи 1 тура**

Задача 1

Вычислите наиболее простым способом:

2007 $\frac{11}{12}$ × 2007 – 2006 $\frac{11}{12}$ ×2007

Решение.

2007$\frac{11}{12}$ × 2007 - 2006$\frac{11}{12}$ × 2007 = (2007$\frac{11}{12}$ – 2006$\frac{11}{12}$) × 2007 = 1 × 2007 = 2007

Ответ: 2007

Задача 2

Ведущий телеигры спросил игрока:

- Верите ли Вы, что я не курю уже 20 дней?

- Верю, - ответил игрок.

- А вот и неверно: я не курю уже 24 дня!

Правильно ли ведущий оценил ответ игрока? Объясните свой ответ.

Решение.

Ведущий неправильно оценил ответ игрока. Если он не курит уже 24 дня, то это означает, что он не курит и 23, и 22, и 21, и 20 дней тоже.

Задача 3

Можно ли расставить 10 стульев вдоль стен квадратной комнаты так, чтобы возле каждой стены было поровну стульев?

Решение.

Можно. Надо поставить по стулу в два противоположных угла комнаты и, кроме этого, по два стула у каждой стены.

Задача 4

Я отпил полчашки черного кофе и долил ее молоком. Потом я отпил $\frac{1}{3}$ чашки и долил ее молоком. Потом я отпил $\frac{1}{6}$ чашки и долил ее молоком. Наконец, я допил содержимое чашки до конца. Чего я выпил больше: кофе или молока?

Решение.

Подсчитаем долитое молоко: $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{6}$ = 1 чашка. Кофе тоже была 1 чашка. Кофе и молока выпито поровну.

**Задачи 2 тура**

Задача 1

Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел 1901 × 1902 × 1903 × … × 1999 × 2000?

Решение.

Среди натуральных чисел от 1901 до 2000 ровно 16 делятся на 5, но не делятся на 5 × 5 = 25. Ещё 3 числа делятся на 25, но не делятся на 5 × 5 × 5 = 125. Да ещё число 2000 делится на 125. Значит, 25 произведений 2 × 5 дадут 25 нулей.

Ответ: 25 нулей

Задача 2

Алеша и Боря вместе весят 82 кг, Алеша и Вова весят 83 кг, Боря и Вова весят 85 кг. Сколько весят вместе Алеша, Боря и Вова?

Решение.

Запишем коротко условие задачи:

А + Б = 82

А + В = 83

В + Б = 85

и сложим левые и правые части равенств:

2(А + Б + В) = 250,

откуда А + Б + В = 125. То есть Алеша, Боря и Вова весят вместе 125 кг.

Ответ: 125

Задача 3

Поезд проходит мимо светофора за 5 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15с. Найдите длину поезда и его скорость.

Решение.

Поезд проходит путь, равный его длине, за 5 с. Чтобы проехать мимо платформы, ему надо проехать 150 м и ещё путь, равный его длине. Значит, 150 м поезд проезжает за 15 –5= 10 с. Его скорость равна 150 : 10 = 15м/с. Длина поезда равна 15 × 5 = 75 м.

Ответ: длина 75 м, скорость 15 м/с

Задача 4

Какое наименьшее число гирь нужно взять, чтобы можно было взвесить любую массу 1кг, 2кг, 3кг, … , 40кг?

Решение.

1 и 3. Получаем 1, 3 – 1, 3, 3 + 1, то есть 1, 2, 3, 4.

Имея еще 9, получаем 5, 6, 7, 8, отнимая от 9 1, 2, 3, 4, и получаем 10, 11,12, 13, прибавляя к 9 1, 2, 3, 4.

Дальше 27; 27 + (1 … 13), 27 – (1…13).

Итак, нужны гири 1, 3, 9, 27.

Ответ: 4 гири: 1кг, 3кг, 9кг, 27кг.

Задача 5

Сможет ли Степа Иванов разложить 44 монеты по 9 карманам так, чтобы количество монет в каждом кармане было различным?

Решение.

Если в 9 карманах различное количество монет, то монет не меньше, чем 1 + 2+ 3 + 4 + 5 +…+9 = 45.

Ответ: нет.

**Задачи 3 тура**

Задача 1

Дан квадрат со стороной 1. Вершина A (4; 3). Стороны квадрата параллельны осям координат. Найдите координаты остальных трех вершин квадрата.

Ответ: 1) В (3; 2), С (4; 2), D (3; 3)

2) В (4; 4), С (3; 4), D (3; 3)

3) В (5; 4), С (4; 4), D (5; 3)

4) В (5; 2), С (4; 2), D (5; 3)

Задача 2

Все целые числа от 1 до 1 000000 выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1972-м месте?

Ответ: 6.

Задача 3

Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько лет мне и сколько лет вам?

Ответ: 36 лет, 27 лет.

Задача 4

В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Ответ: 19 рыжиков и 11 груздей.

Задача 5

Каждый из четырех гномов – Беня, Веня, Женя и Сеня – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали разговор:

Беня – Вене: «Ты врун».

Веня – Жене: «Сам ты врун!»

Женя – Сене: «Оба они вруны. Да и ты тоже».

Кто из них говорит правду?

Ответ: Веня и Женя.

 **Математический бой**

 **6 класс**

Задача 1

У рыболова спросили: «Сколько весит пойманная рыба?» Он ответил: «Три четверти килограмма и еще три четверти своего веса» Сколько весит рыба?

Ответ: 3 кг.

Задача 2

Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы четырех нечетных чисел?

Ответ: 3.

Задача 3

Среднее арифметическое двух чисел равно 55, а одно из чисел равно 29,7. Чему равно другое число?

Ответ: 80,3.

Задача 4

Сколько существует двузначных чисел, записанных только: а) нечетными цифрами;

б) четными цифрами ( цифры в записи числа не повторяются)?

Ответ: а) 20; б) 16.

Задача 5

Найдите значение суммы: 1 + 1/2 +1/4 + 1/8 +…+ 1/1024.

Ответ: 2047/1024.

**Интернет источники**

1. <https://pandia.ru/text/80/462/51445.php>
2. <http://mmmf.msu.ru/archive/20122013/z6/15.html>
3. <https://infourok.ru/osnovnye-napravleniya-i-metodicheskie-trebovaniya-k-podgotovke-uchashihsya-k-matematicheskim-konkursam-olimpiadam-4253071.html>
4. <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2012/08/07/metodicheskaya-razrabotka-po-teme-iz-opyta-raboty-podgotovki>
5. https://www.azbyka.kz/files/pdf/932/932.pdf