**Предмет:** Математика

**Тема:** Последовательности. Производная

План:

1. **Последовательности.**
2. **Производная.**
3. **Уравнение касательной к графику функции.**
4. **Применение производной.**
5. **Вторая производная.**

**- 1 –**

**Последовательность**, одно из основных понятий математики. Последовательность образуется из элементов любой природы, занумерованных натуральными числами 1, 2,..., n,...,и записывается в виде x1, x2, …, xn, …или коротко, {xn}.

Элементы, из которых составляется последовательность, называются её членами. Члены последовательности, стоящие на разных местах, могут совпадать.

Последовательность можно рассматривать как функцию от натурального аргумента (т. е. функцию, определённую на множестве натуральных чисел). Обычно последовательность определяется заданием n-го члена или [рекуррентной формулой](http://slovari.yandex.ru/~%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8/%D0%91%D0%A1%D0%AD/%D0%A0%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0/), по которой каждый следующий член определяется через предыдущий (см., например, [Фибоначчи числа](http://slovari.yandex.ru/~%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8/%D0%91%D0%A1%D0%AD/%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8%20%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0/)).

**Рекуррентная формула** (от лат. recurrens, родительный падеж recurrentis — возвращающийся), формула приведения, формула, сводящая вычисление n-го члена какой-либо последовательности (чаще всего числовой) к вычислению нескольких предыдущих её членов. Обычно эти члены находятся в рассматриваемой последовательности "недалеко" от её n-го члена, число их от n не зависит, а n-й член выражается через них достаточно просто.

**Фибоначчи числа,** элементы числовой [возвратной последовательности](http://slovari.yandex.ru/~%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8/%D0%91%D0%A1%D0%AD/%D0%92%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C/) 1, 1, 2, 3, 5, 8,... (ряда Фибоначчи), в которых каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Название по имени средневекового математика [Леонардо Пизанского](http://slovari.yandex.ru/~%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8/%D0%91%D0%A1%D0%AD/%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BE%20%D0%9F%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9/) (или Фибоначчи).

Наиболее часто встречаются числовые и функциональные последовательности (т. е. последовательности, членами которых являются числа или функции). Примеры:

1, 2, …, n, …, то есть xn= n;     (1)

05306 , то есть 05307 ;     (2)

05308 , то есть 05309 ;     (3)

05310 , то есть 05311 ;     (4)

Если элементы числовой последовательности при достаточно больших номерах  n сколь угодно мало отличаются от числа а, то последовательность называется сходящейся, а число а —её [пределом](http://slovari.yandex.ru/~%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8/%D0%91%D0%A1%D0%AD/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB/) (аналогично определяется предел при функциональных последовательностях).

**Предел,** одно из основных понятий математики. Предел - постоянная, к которой неограниченно приближается некоторая переменная величина, зависящая от другой переменной величины, при определённом изменении последней.

Число а называется **пределом последовательности** xn, если для любого  все члены последовательности xn, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в - окрестности точки а, т.е. найдется такое натуральное число N, что при будет выполнено неравенство .

Запись  означает, что число а является пределом последовательности.

Последовательность может иметь только один предел. Если последовательность имеет предел, то такую последовательность называют *сходящейся*; последовательность, не имеющую предела, называют *расходящейся*.

Например, последовательности (2) и (4) — сходящиеся, и их пределами служат число 0 и функция 1/(1 + x2); последовательности (1) и (3) - называются расходящимися.

**Способы задания последовательностей.**

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана **аналитически**, если задана формула ее *n*-го члена:

*yn*=*f*(*n*).

Пример. *yn*= 2*n –*1 *–* последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, …

2. **Описательныйспособ** задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Пример 1. «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, …, 1, ….

Пример 2. «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, …. При таком способе задания последовательности в данном примере трудно ответить, чему равен, скажем, 1000-й элемент последовательности.

3. **Рекуррентный способ** задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить *n*-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Название рекуррентный способ происходит от латинского слова *recurrere*– возвращаться. Чаще всего в таких случаях указывают формулу, позволяющую выразить *n*-й член последовательности через предыдущие, и задают 1–2 начальных члена последовательности.

Пример 1. , если*n* = 2, 3, 4,….

Здесь 

## Свойства числовых последовательностей.

*Определение****.***Последовательность {*yn*}называют **возрастающей**, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего: *y*1 < *y*2 < *y*3 < …< *yn* < *yn*+1 < ….

*Определение.*Последовательность {*yn*}называют **убывающей**, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего: *y*1 > *y*2 > *y*3 > … > *yn*> *yn*+1 > ….

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – **монотонные последовательности.**

*Определение.* Последовательность называется **периодической**, если существует такое натуральное число *T*,что начиная с некоторого *n*, выполняется равенство *yn*= *yn+T*. Число *T* называется длиной периода.

## Арифметическая прогрессия.

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа *d*, называют арифметической[прогрессией](http://www.krugosvet.ru/), а число *d* – разностью арифметической прогрессии.

Таким образом, арифметическая прогрессия – это числовая последовательность {*an*}, заданная рекуррентно соотношениями

*a*1 = *a*, *an*= *an*–1 + *d* (*n* = 2, 3, 4, …)

(*a* и *d* – заданные числа).

Пример. 1, 3, 5, 7, 9, 11, … – возрастающая арифметическая прогрессия, у которой *a*1 = 1, *d* = 2.

Пример. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4,… – убывающая арифметическая прогрессия, у которой *a*1 = 20, *d* = –3.

*an* = *a*1 + *d*(*n*– 1) - Это формула *n-*го члена арифметической прогрессии.

[1012639_image010](http://www.krugosvet.ru/images/1012639_image010.gif) - Это формула суммы *n*членов арифметической прогрессии.

## Геометрическая прогрессия.

Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением на одно и то же число *q*, называют геометрической прогрессией, а число *q* – знаменателем геометрической прогрессии.

Таким образом, геометрическая прогрессия – это числовая последовательность {*bn*}, заданная рекуррентно соотношениями

*b*1 = *b*, *bn* = *bn*–1 *q* (*n* = 2, 3, 4…). (*b* и *q –*заданные числа, *b* ≠0, *q* ≠ 0).

Пример 1. 2, 6, 18, 54, … – возрастающая геометрическая прогрессия *b* = 2,*q* = 3.

Пример 2. 2, –2, 2, –2, … *–* геометрическая прогрессия *b*= 2,*q*= –1.

Пример 3. 8, 8, 8, 8, … *–* геометрическая прогрессия *b*= 8, *q*= 1.

Геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если *b*1 > 0, *q* > 1, и убывающей, если *b*1 > 0, 0 < *q* < 1.

Формула *n-*го члена геометрической прогрессии имеет вид *bn*= *b*1*qn–*1.

Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии: [1012639_image014](http://www.krugosvet.ru/images/1012639_image014.gif) если *q ≠* 1.

Если  *q*= 1, то  *Sn*= *b*1*n*.

|  |
| --- |
| При |*q*| < 1 предел 63230175627590-7, поэтому в этом случае геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***. Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число  63230175627600-8, |

где *Sn* – сумма *n* первых членов геометрической прогрессии.

|  |
| --- |
| Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (|*q*| < 1) равна 63230175627640-9 |

**- 2 –**

**Приращение функции.**

Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, сила упругости пружи­ны пропорциональна удлинению пружины; работа есть изме­нение энергии; средняя скорость — это отношение переме­щения к промежутку времени, за который было соверше­но это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции *f* в некоторой фикси­рованной точке *х0* со значениями этой функции в различных точках *х,* лежащих в окрестности *х0*, удобно выражать раз­ность *f (x) — f (х0)* через разность *х — х0.*



Пусть *х* — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки *х0.* Разность *х — х0* называ­ется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента)* в точке *х0* и обозначается *∆x*. Таким образом,

откуда следует, что *х = х0+∆x*

Говорят также, что первоначальное значение аргумента *х0* получило приращение *∆x*. Вследствие этого значение функ­ции *f* изменится на величину



Эта разность называется *приращением функции f* в точке *х0*.





откуда

Обратите внимание: при фиксированном х0 приращение ∆f есть функция от ∆х.

*Пример 1.*

Найдем приращение *∆х* и *∆f* в точке *х0*, если *f(x) = x2*, *x0=2* и:

а) *х=1,9*

*а) ∆x = x-x0 = 1,9 – 2 = -0,1*

*∆f=f(1,9) – f(2) = 1,92-22 = -0,39*

**Производная.**

1) С помощью формулы, задающей функцию *f*, находим  
ее приращение в точке *x0: ∆f = f(x0 + ∆x)-f(x0).*

2) Находим выражение для *разностного отношения :* , которое затем преобразуем — упрощаем, сокращаем на ∆*х* и т. п.

3) Выясняем, к какому числу стремится **, если считать, что *∆х* стремится к нулю.

Найденное таким образом число иногда называется (по аналогии с физикой) *скоростью изменения функции f* в точке *х0* или (что более принято) *производной функции f в точке х0.*

Определение. **Производной функции *f* в точке *х0* называется число, к которому стремится разностное отношение  при *∆x,* стремящемся к нулю.**

ОПР. **Производной функции** ***f*** в точке х0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

****

Производная функции *f* в точке *х0* обозначается *f’ (x0)* (читается: «Эф штрих от *х0*»*).*

Пример 1.

Найдем производную функции *f (х)* = *х3* в точке *х0.*

Будем действовать по описанной выше схеме.

1. *∆f = (х0 + ∆х)3 — х3 = 3х20 ∆х + Зх0(∆х)2 + (∆х)3.*
2. * (∆х # 0)*
3. Теперь заметим, что слагаемое *3x02* постоянно, а при *∆x→0* очевидно, что 3х0∆x →0 и (∆x)2→0, а значит, и **. Получаем:

 *при ∆x→0*.

Следовательно, 

Функцию, имеющую производную в точке *х0,* называют *дифференцируемой* в этой точке.

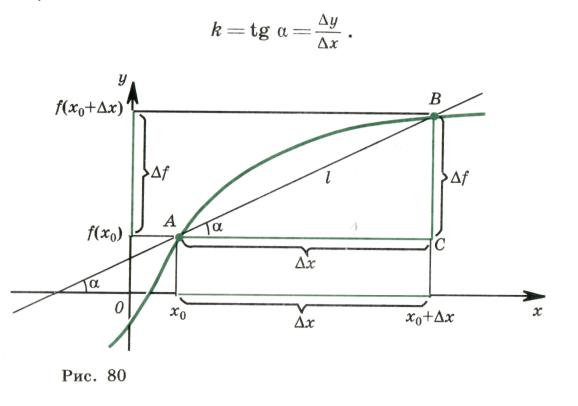
Нахождение производной данной функции *f* называется *дифференцированием.*

***(х2)’ = 2х, (х3)’ = Зх2, (kx + b)' = k.***

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ**

Если к линии y=f(x) в точке x0 проведена касательная, то угловой коэффициент касательной равен значению производной f(x) в точке x0, т.е.

**k = tgϕ =** **f '(x0)**

 **m**

На рисунке *l* – это секущая, но как нам известно, касательная есть предельное положение секущей при . (Касательная это m.)

Если функция у = f(x) имеет производную в точке х0, то:

1) в этой точке имеется касательная к графику функции;

2) её угловой коэффициент равен значению производной f '(x0)

**МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ**

При движении тела пройденный путь S есть функция от времени t, т.е. S = S(t), тогда скорость движения в данный момент времени t0 (мгновенная скорость) есть производная от пути по времени, т.е. V = S'(t).

**ГЛОБАЛЬНЫЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ**

Производная функции y=f(x) в точке х0 выражает скорость изменения функции в точке х0, т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью y = f(x).

**Формулы производных:**

**Производные элементарных функций:**

****

****

, в частности 

****, в частности ****

**Производные тригонометрических функций.**

**Производные обратных тригонометрических функций.**

**Формула производной сложной функции.**

Если функция *f* имеет произвольную в точке *х0*, а функция *g* имеет производную в точке *y0 = f(x0)*, то сложная функция *h(x) = g(f(x))* также имеет производную в точке *х0*, причем 

**Правила вычисления производных.**

***Правило 1.*** Если функции *и* и *v* дифференцируемы в точке *х0,* то их сумма дифференцируема в этой точке и

***(u + v)' = u' + v’***

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных.*

***Правило 2.*** Если функции *и* и *v* дифференци­руемы в точке *х0,* то их произведение дифферен­цируемо в этой точке и

***(uv)' = u’v + uv’***

***Следствие.*** Если функция и дифференцируе­ма в х0, а С — постоянная, то функция *Сu* диф­ференцируема в этой точке и

***(Си)' = Си’***

Коротко говорят*: постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

***Правило 3.*** Если функции *и* и *v* дифференци­руемы в точке *х0* и функция *v* не равна нулю в этой точке, то частное  также дифференцируе­мо в *х0* и

****

**- 3 –**

**Касательная к графику дифференцируемой в точке х0  функции f** – это прямая, проходящая через точку (x0; f(x0)) и имеющая угловой коэффициент f(x0)′.

*Уравнение касательной..*

Выведем теперь уравнение касательной к графику функции f в точке А(х0; f(x0)).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом f ′ (x0) имеет вид: у = f ′ (x0) х + b.

Для вычисления b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку А:

f (x0) = f ′ (x0) x0 + b, откуда b = f (x0) - f ′ (x0) x0 ,

значит, уравнение касательной таково:

у = f ′ (x0) х - f ′ (x0) x0 + f (x0) ,

или **у = f (x0) + f ′ (x0)(х – х0). (1)**

*Пример1.*

Найдем уравнение касательной к графику функции f (х) = х3 – 2х2 + 1 в точке с абсциссой 2.

*Решение:*

В этом примере x0 = 2, f (x0) = f (2) = 23 – 2\*22 + 1 = 1, f ′ (x) = 3х2 – 4х,

f ′ (x0) = f ′ (2) = 3\*22 – 4\*2 = 4. Подставляя эти числа в уравнение (1),

получаем уравнение у = 1 + 4 (х - 2), т.е. у = 4х – 7.

Если функция дифференцируема, то на интервале (а;b) найдется такая точка с  (а;b), что **f (b) - f (а)**

**f ′ (с) =**

**b – а**

Эта формула называется *формулой Лагранжа.*

**- 4 –**

**Применение производной к исследованию функций и построению графиков:**

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Такое исследование легко провести с помощью производной. Сформулируем соответствующие утверждения.

*Достаточный признак возрастания функции.* **Если f ′ (x) > 0 в каждой точке интервала I , то функция f возрастает на I .**

*Достаточный признак убывания функции.* **Если f ′ (x) < 0 в каждой точке интервала I , то функция f убывает на I .**

*Пример7.*

### Найдем промежутки возрастания (убывания) и построим график функции

f(x) = x – x3.

Данная функция определена на множестве всех действительных чисел. Из равенства f ′ (x) = 1 – 3х2 следует, что f ′ (x) > 0 , если 1 – 3х2 > 0. решая это неравенство методом интервалов, получим, что f ′ (x) > 0 на интервале (-1/√3; 1/√3), и, значит, на этом интервале f возрастает.

\_\_ \_\_

-1/√3 1/√3

Аналогично f ′ (x) < 0 на интервалах (- ∞;-1/√3) и (1/√3; +∞), поэтому на этих интервалах f убывает. Далее вычислим значения f в точках -1/√3 и 1/√3:

f (-1/√3) = -1/√3 – (- 1/√3)3 = - 2/3√3; f (1/√3) = 1/√3 – (1/√3)3 = 2/3√3

На координатной плоскости отметим точки М(-1/√3; -2/3√3) и N(1/√3; 2/3√3) и нарисуем проходящий через них график функции, возрастающий на интервале

(-1/√3; 1/√3) и убывающий на интервалах (- ∞;-1/√3) и (1/√3; +∞) (рис.1)

у

Из рисунка видно, что функция f непрерывная

в точках – 1/√3 и 1/√3, возрастает на отрезке

2√3 N [ - 1 /√3]; [ 1 /√3 ] и убывает на промежутках

1. 9 у = х – х3  ( - ∞ ; - 1 /√3] и [1 /√3; + ∞).

√3

- 1 0 1 1 х

М √3

***Рис. 1***

*Замечание 1.* Если функция f непрерывна в каком – либо из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку (как точки -1/√3 и 1/√3 в примере 4).

*Замечание 2.* Для решения неравенств f ′(x) > 0 и f ′(x) < 0 удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции f на промежутки, в каждом из которых f ′ сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение f ′ в какой – нибудь точке промежутка.

Мы рассмотрели поведение функции на промежутках, где f ′(x)>0 и f ′(x)<0. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками** этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции.

**Необходимое условие экстремума.**Если точка х0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f ′, то она равна нулю: f ′ (х0)=0.

Важно отметить, что из того, что производная в точке х0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции f (х) = х3 обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет (рис.2).

у у

у = х3  у = I х I

х0 х

***Рис. 2 Рис. 3***

*Пример8 .* Рассмотрим функцию f(х) =  (рис.3). Эта функция не имеет производной в нуле. Значит , 0 – критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

**Признак максимума функции.**Если функция f непрерывна в точке х0, а f′(x) > 0 на интервале (а; х0) и f′ x) < 0 на интервале (х0; в), то точка х0 является точкой максимума функции f.

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке х0 производная меняет знак с плюса на минус, то х0 есть точка максимума.

**Признак минимума функции*.***Если функция f непрерывна в точке х0, f′(x)<0 на интервале(а; х0) и f′(x)>0 на интервале (х0; в), то точка х0 является точкой минимума функции f.

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке х0 производная меняет знак с минуса на плюс, то х0 есть точка минимума.

*Пример 9.* Найдем точки экстремума функции f(х) = 3х – х3.

f′(x) = 3 – 3х2, f ′(x) – определена во всех точках и f′(- 1) = 0, f′ (1) = 0

f′(x)<0 при x<- 1 (с « - » на « + ») и f ′(x)>0 при – 1 < х < 1 (с « + » на « - »),

=>, точка (- 1) – точка минимума

точка ( 1 ) – точка максимума функции f . (***рис. 4***)

у

2

у = 3х –х3

-√3 -1 0 1 √3 х

-2

***Рис. 4***

**Рассмотрим пример применения производной к исследованию функций.**

*Пример10.*  Исследуем функцию f (x) = 3х5 – 5х3 + 2 и построим ее график.

1. D(f) = R , т.к. f – многочлен.
2. функция f не является ни четной, ни нечетной (докажите самостоятельно)
3. 4. график f пересекается с Оу в точке (0; f (0));

с Ох: (1;0), т.к. 3х5 – 5х3 + 2 = 0

5. 6. f ′ (x) = 15х4 – 15х2 = 15х2 (х2 - 1)

D(f ′ ) = R, => критических точек, для которых f ′(x) не существует, нет.

Заметим, что f ′(x) = 0, если х2(х2 - 1) = 0, т.е.при значениях аргумента, равных 0, -1 и 1. Данная функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критические точки функции и ограниченные ими промежутки | х | (-∞; -1) | -1 | (-1; 0) | 0 | (0;1) | 1 | (1; ∞) |
| Знаки производных на этих промежутках | f ′(x) | + | 0 |  | 0 |  | 0 | + |
| Убывание и возрастание функции | f(x) |  | 4 |  | 2 |  | 0 |  |
| Вид критических  точек |  |  | max |  |  |  | min |  |

***Вывод*** о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например, f(0) < f(-1), следовательно, на (-1; 0) функция убывает (и, следовательно, f ′ < 0 на этом промежутке).

Строим график функции (рис.5), учитывая, что касательные в точках 0; 1; -1 должны быть горизонтальными (видно из второй строки).

у

4

2 у = 3х5- 5х3+ 2

- 1 0 1 х

##### Рис. 5

**Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.**

**Теорема Вейерштрасса:** непрерывная на отрезке [a; b] функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют точки отрезка

[a; b], в которых f принимает наибольшее и наименьшее на [a; b] значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на [a; b], но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем правило отыскания наибольшего и наименьшего значений f.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

*Пример11.*  Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

у (х) = х3 – 1,5х2 – 6х + 1 на [-2; 0]

1. у ′ (х) = 3х2 – 3х – 6 определена для любого х.

Решая 3х2 – 3х – 6 = 0 находим х = -1 и х = 2 – критические точки

1. у(-2) = -1; у(-1) = 4,5; у(0) = 1 (критическая точка х = 2 не принадлежит [-2; 0]), следовательно, в точке (-2) – наименьшее значение и равно -1;

в точке (-1) – наибольшее значение и равно 4,5,

т.е. max у (х) = у(-1) = 4,5;

[-2; 0]

min у (х) = у(-2) = -1.

[-2; 0]

При нахождении наибольших и наименьших значений действуют по следующей схеме:

1. задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр х, через который интересующую нас величину выражают как функцию f (x);
2. средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
3. выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

**- 5 –**

Если функция **f ’** дифференцируема, то ее производную называют второй производной от **f** и обозначают **f ”** :

**f ” = (f ’)’.**

**Физический смысл производной второго порядка** проясняется из того, что если первая производная **f’(x)** задаёт мгновенную скорость изменения значений **f(x)** в момент времени **x** в момент времени **f’(x)**, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть ускорение значений **f(x)**.

**Геометрический смысл производной второго порядка** связан с понятием выпуклости и кривизны графика функции.

**Общая схема исследования:**

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график.

**Пример.**  Построить график функции **.**

1. Функция определена на всей числовой прямой, ****
2. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.
3. Найдем точки пересечения графика с осью *Оу*: полагая *х=0*, получим *у=-3*.

Точки пересечения графика с осью *Ох* найти затруднительно.

1. График функции не имеет асимптот.
2. Найдем производную: .

Решая уравнение , найдем .

Точки  делят область определения функции на 3 промежутка:

, и .

\_\_ \_\_

1 3

 в промежутках  и , т.е. функция возрастает,

в промежутке , т.е. функция убывает.

В точке производная меняет знак с плюса на минус, а в точке  производная меняет знак с минуса на плюс , значит , .

1. Найдём вторую производную: . Решая уравнение , найдем .

Точка  делит область определения функции на 2 промежутка:  и .

\_\_

2

В промежутке  производная , следовательно, кривая выпукла вверх, а в промежутке производная , следовательно, кривая выпукла вниз.

Таким образом получаем точку перегиба (2; -1).

1. Используя полученные данные, строим график.

у

**(1;1)**

х

**(2;-1)**

**(0;-3) (3;-3)**

**Домашнее задание:**

1. изучение конспекта лекции