

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО АЛГЕБРЕ.  
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ.**

З.М.КЕНЖАЕВ

1. Последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  заданы формулами  $x_n = 2n - 1$  и  $y_n = n^2$ . Если выписать в порядке возрастания все общие члены этих последовательностей, то получится последовательность  $(c_n)$ . Напишите формулу  $n$ -го члена последовательности  $(c_n)$ .

**Р е ш е н и е.** Запишем последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  и  $(c_n)$ :

$$\begin{array}{ll} (x_n) & 1, 3, 5, 7, 9, \dots; \\ (y_n) & 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots; \\ (c_n) & 1, 9, 25, 49, \dots \end{array}$$

Таким образом, членами последовательности  $(c_n)$  являются члены последовательности  $y_n$  с нечетными номерами, т. е.  $c_n = (2n - 1)^2$ .

**З а м е ч а н и е.** Формулу  $c_n$  можно получить и с помощью других рассуждений. Имеем:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 = 1^2, \\ c_2 &= 9 = 3^2 = (n + 1)^2, \\ c_3 &= 25 = 5^2 = (n + 2)^2, \\ c_4 &= 49 = 7^2 = (n + 3)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $c_n = (n + (n - 1))^2 = (2n - 1)^2$ . (Полученную формулу для  $c_n$  целесообразно доказать методом математической индукции.)

**О т в е т:**  $(2n - 1)^2$ .

2. При каких значениях  $n$  члены последовательности, заданной формулой  $x_n = (n+4)(n-5)$ , удовлетворяют условию  $-18 \leq x_n \leq 360$ ?

Решение. Так как  $x_n = n^2 - n - 20$  и  $-18 \leq x_n \leq 360$ , то задача сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} n^2 - n - 20 \leq 360, \\ n^2 - n - 20 \geq -18; \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - n - 380 \leq 0, \\ n^2 - n - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы, найдем  $-19 \leq n \leq 20$ , при этом условию задачи ( $n \in \mathbf{N}$ ) удовлетворяют значения  $n \in [1, 20]$  (\*).

Решением второго неравенства являются значения  $n$ , удовлетворяющие неравенству  $n \leq -1$  или неравенству  $n \geq 2$ , из которых условию задачи ( $n \in \mathbf{N}$ ) удовлетворяют лишь  $n \in [2; +\infty)$  (\*\*).

Учитывая решения (\*) и (\*\*), найдем ответ к задаче.

О т в е т:  $2 \leq n \leq 20$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

З а м е ч а н и е. Целесообразно сделать проверку.

При  $n=2$   $x_n = -18$ ; при  $n=20$   $x_n = 360$ . Так как  $x_n = n^2 - n - 20$  — непрерывная функция, то при  $2 \leq n \leq 20$  имеем  $-18 \leq x_n \leq 360$ .

3. Найдите сумму  $n$  первых членов последовательности  $(x_n)$ , если  $x_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ .

$$\text{Решение. } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}, x_3 = \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{35},$$

$$x_4 = \frac{1}{7 \cdot 9}, x_5 = \frac{1}{9 \cdot 11}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} = \\ &= \frac{2n+1-1}{2(2n+1)} = \frac{2n}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{О т в е т: } \frac{n}{2n+1}.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Если учащиеся затрудняются решить эту задачу, то в качестве вспомогательной задачи им целесообразно предложить следующую: «Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \text{ »}.$$

**Р е ш е н и е.**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} = \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = \\ & = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 2.** Целесообразно сделать проверку, вычислив несколько значений  $S_n$  по формуле и непосредственным сложением  $n$  первых членов. Так, при  $n=1$  по формуле получаем  $S_1 = \frac{1}{3}$ . По условию  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $S_1 = x_1$ .

При  $n=2$   $x_1 + x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$ . По формуле  $S_2 = \frac{2}{5}$ .

При  $n=3$   $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$ . По формуле  $S_3 = \frac{3}{7}$ .

**4.** В последовательности  $(x_n)$  каждый член с нечетным номером равен  $2a$ , а с четным  $2b$ . Напишите формулу  $n$ -го члена этой последовательности.

**Р е ш е н и е.** Данная последовательность имеет вид  $2a, 2b, 2a, 2b, \dots$ . Формулу  $n$ -го члена этой последовательности можно задать несколькими способами.

**И с п о с о б.** Покажем, что последовательность  $(x_n)$  можно задать формулой  $x_n = c + (-1)^n d$ , где  $c$  и  $d$  — некоторые числа. Тогда по условию имеем:

$$\begin{cases} c + d = 2b, \\ c - d = 2a, \end{cases}$$

откуда  $c = a + b$ ,  $d = b - a$ . Следовательно,

$$x_n = (a + b) + (-1)^n \cdot (b - a), \quad n \in \mathbf{N}.$$

**З а м е ч а н и е.** Получив формулу  $x_n = (a + b) + (-1)^n (b - a)$ , целесообразно предложить учащимся записать ее другим способом, используя сведения из тригонометрии. Получим:

а)  $x_n = (b - a) \sin \left( \frac{\pi}{2} (2n + 1) \right) + (a + b), \quad n \in \mathbf{N};$

б)  $x_n = (b - a) \cos \pi n + (a + b), \quad n \in \mathbf{N}.$

II способ. Если учащиеся знакомы с понятием дробной части числа, то формулу  $n$ -го члена заданной последовательности они могут записать, например, так:

$$x_{2n+1} = 4a \left\{ \frac{n}{2} \right\} + 4b \left\{ \frac{n+1}{2} \right\};$$

где  $\left\{ \frac{n}{2} \right\}$  — дробная часть числа  $\frac{n}{2}$ ,

$\left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$  — дробная часть числа  $\frac{n+1}{2}$ .

Действительно, имеем:

$$x_1 = 4a \left\{ \frac{1}{2} \right\} + 4b \{1\} = 4a \cdot \frac{1}{2} + 4a \cdot 0 = 2a;$$

$$x_2 = 4a \{1\} + 4b \left\{ \frac{3}{2} \right\} = 4a \cdot 0 + 4b \cdot \frac{1}{2} = 2b;$$

$$x_3 = 4a \left\{ \frac{3}{2} \right\} + 4b \{2\} = 4a \cdot \frac{1}{2} + 4b \cdot 0 = 2a;$$

$$x_{2n} = 4a \{n\} + 4b \left\{ n + \frac{1}{2} \right\} = 4a \cdot 0 + 4b \cdot \frac{1}{2} = 2b;$$

$$x_{2n+1} = 4a \left\{ \frac{1}{2} \right\} + 4b \{n+1\} = 4a \cdot \frac{1}{2} + 4b \cdot 0 = 2a.$$