**ПрактическАЯ РАБОТА№ 5**

**Тема: Монотонность. Экстремумы. Выпуклость – вогнутость. Асимптоты.**

*Цели:*

* повторить правила нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции с помощью производной
* научиться решать примеры на нахождение промежутков монотонности и экстремумов функций
* изучить правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба с помощью второй производной
* научиться решать примеры на нахождение промежутков выпуклости-вогнутости функции и точек перегиба.
* научиться находить асимптоты графика функции

*Оснащение занятия*: конспект лекций.

**Критерии оценок**

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за выполнение задания 1 и верное решение любых шести примеров из задания 2.

оценка «3» ставится за выполнение задания 1 и верное решение любых четырех примеров из задания 2.

**Порядок выполнения работы**

*Задание 1.*

- Ознакомиться с лекциями № 6,7

- Пользуясь лекциями, ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:

1.Какая функция называется возрастающей (убывающей)?

2. Каким образом монотонность связана с производной?

3. Выпишите в тетрадь правило для отыскания промежутков монотонности.

4.Что такое точки экстремума и экстремумы функции?

5. Как с помощью производной находят экстремумы функции? Записать в тетрадь правило отыскания экстремумов функции.

6.Какая кривая называется выпуклой (вогнутой) на промежутке?

7. Как с помощью производной можно найти промежутки выпуклости – вогнутости функции?

8. Какая точка называется точкой перегиба функции?

9. Выпишите в тетрадь правило для отыскания промежутков выпуклости – вогнутости функции и точек перегиба.

10.Какие виды асимптот вы знаете?

11. Как находятся разные виды асимптот?

12. Выписать в тетрадь рассмотренные в лекциях примеры по нахождению промежутков выпуклости, вогнутости функции, точек перегиба и асимптот.

*Задание 2.*

Решить примеры для самостоятельного решения

**Лекция 6.**

**Тема «Промежутки монотонности и экстремумы функции»**

Функция называется ***возрастающей (убывающей)*** в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются ***монотонными.*** Если функция не является монотонной, то область её определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Монотонность функции *y = f(x)* характеризуется знаком её первой производной *f '(x)*, а именно, ***если в некотором промежуткеf '(x)***$>0 $

$[$***f '(x)***$<0]$***, то функция возрастает (убывает) в этом промежутке.*** Следовательно, отыскание промежутков монотонности функции *y = f(x)*сводится к нахождению промежутков знакопостоянства её первой производной*f '(x).*

Отсюда получаем **правило для нахождения промежутков монотонности функции*y = f(x).***

1. Найти нули и точки разрыва *f '(x).*

2. Определить знак f '(x) в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции*f(x)*; промежутки, в которых *f '(x )*$>0$, являются промежутками возрастания функции, а промежутки, в которых

*f '(x)*$<0, являютсяпромежуткамиубыванияфункции$. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем производной *f '(x),* знак *f '(x)* одинаков, то они составляют единый промежуток монотонности.

**Пример.**

1. Найти промежутки монотонности функции *y =*$ х^{4}- \frac{х^{3}}{3}- 2х^{2}+х$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Дифференцируя, получим: *y' =*4$х^{3}$- $х^{2}$- 4х + 1 = 4х($х^{2}- 1)- $($х^{2}- 1)$ =

($х^{2}- 1)(4х-1)$. Точек разрыва производная *y'* не имеет, а в нуль она обращается в трех точках: х = -1, х = $\frac{1}{4}$, х = 1. Этими точками область определения разбивается на четыре промежутка (-$\infty ; -1), \left(-1; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4};1\right), $

(1; +$\infty )$, в каждом из которых*y'* сохраняет постоянный знак.

 Определим знаки производной в этих промежутках, используя метод интервалов. Тогда получим, что в промежутках (-$\infty ; -1) и \left(\frac{1}{4};1\right)$выполняется неравенство *y'*$<0$*,* а в промежутках $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и (1; +$\infty )$ - неравенство *y'*$>0$*.* Следовательно, в промежутках (-$\infty ; -1) и \left(\frac{1}{4};1\right)$ функция убывает, а в промежутках$\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и (1; +$\infty )$ - возрастает.

Точка х = х0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции

*y = f(x)*, если существует такая окрестность точки х0, что для всех х(х $\ne $ х0) из этой окрестности выполняется неравенство *f(x)*$<$*f(x0)* (соответственно*f(x)*$>$*f(x0)*$ )$

Точки максимума и минимума функции называются ***точками её экстремума***, а значение функции в точке максимума (минимума) – ***максимумом (минимумом)*** или ***экстремумом*** функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода,

 т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная *f '(x)* обращается в нуль или терпит разрыв.

 Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная*f '(x)* меняет знак, а именно, ***если при переходе через критическую точку х = х0 в положительном направленииf '(x) меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то***

***х = х0 есть точка максимума (минимума).***

 Отсюда получаем **правило отыскания экстремумов функции *y = f(x).***

1. Найти нули и точки разрыва *f '(x).*

2. Определить знак*f '(x)* в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции*f(x).*

3. Из этих точек выделить те, в которых функция*f(x)* определена и по разные стороны от каждой из которых производная *f '(x)* имеет разные знаки – это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка х = х0 является точкой максимума, если при движении по оси*Ох* в положительном направлении она отделяет промежуток, в котором *f '(x)*$>0$ *,* от п$ромежутка, в котором $*f '(x)*$<0$, и точкой минимума в противном случае.

Заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной *f ''(x0)*: ***точках = х0, в которой f ''(x0) = 0, а f ''(x)существует и отлична от нуля, является экстремальной,*** а именно ***точкой максимума, если f ''(x0)*** $<$ ***0, и точкой минимума, если f ''(x0)*** $>$ ***0.***

**Пример.**

1. Найти экстремумы функции y = 6х4 – 8х3 – 3х2 + 6х

Решение. Здесь D(y) = R. Дифференцируя данную функцию, находим

y' = 24х3 – 24х2 – 6х + 6 = 6(4х3 – 4х2 – х + 1) = 6[4x2(x – 1) – (x – 1)] =

6(4x2 – 1)(x – 1) = 6(2x – 1)(2x + 1)(x – 1).

Производная обращается в нуль при х = $- \frac{1}{2}$, х = $\frac{1}{2}$, х = 1. Эти три точки разбивают всю числовую ось на четыре промежутка (-$\infty $,$- \frac{1}{2}), $($- \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2})$, ($\frac{1}{2}, 1)$, (1, +$\infty $), внутри которых y' сохраняет определенный знак. Найдем знак производной в каждом из указанных промежутков: на (-$\infty $,$- \frac{1}{2}) $имеем y'$<0$; на ($- \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2})$ имеемy'$>0$; на ($\frac{1}{2}, 1) имеем y^{'}<0; на$(1, +$\infty $) имеем y'$>0. $

Отсюда следует, что точки х = $- \frac{1}{2}$, х = $\frac{1}{2}$, х = 1 являются экстремальными, так как при переходе через каждую из них производная меняет знак. При этом в точках х = $- \frac{1}{2} и $х = 1 происходит смена знаков с минуса на плюс, т. е. это – точки минимума; при переходе через точку х = $\frac{1}{2}$ знак производной меняется с плюса на минус, значит, это – точка максимума.

 Экстремумы функции найдем, вычислив её значения в экстремальных точках: ymin = y($- \frac{1}{2})$ = - $\frac{19}{8}$, ymax = y($\frac{1}{2})$ = $\frac{13}{8 },$ymin = y(1$)$ = 1.

**Примеры для самостоятельного решения.**

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

 1. у = х4 - 32х + 40

2. у = lnx - $\frac{1}{3}х^{3}$

Исследовать функцию на экстремумы:

3. у(х) = 3х4 – 4х3

4.у(х) = $\frac{х^{2}+16}{х+3}$