

Среди задач повышенной трудности, рассматриваемых при изучении курса алгебры, значительное место занимают задачи на построение графиков функций и зависимостей, содержащих знак модуля. И хотя в методической литературе этому вопросу уделяется немало внимания, наблюдения показывают, что такие задачи вызывают у учащихся затруднения и они допускают ошибки при построении указанных выше графиков.

Одна из причин таких ошибок кроется, на наш взгляд, в непонимании учащимися определения модуля числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

При работе над определением модуля числа учитель должен обратить внимание учащихся на то, что число $-x$ может быть как отрицательным (при $x > 0$), так и положительным (при $x < 0$). (Учащиеся нередко считают, что число $-x$ всегда отрицательное.)

В курсе алгебры неполной средней школы (на уроках и в период проведения внеклассной работы) целесообразно рассмотреть, прежде всего, построение графиков трех видов:

$$y = f(|x|), \quad y = |f(x)| \quad \text{и} \quad |y| = f(x).$$

Для закрепления навыков построения таких графиков при соответствующей подготовке учащихся можно рекомендовать и построение графиков вида $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(|x|)$ и $|y| = |f(|x|)|$.

Для построения всех таких графиков учащимся достаточно хорошо понимать определение модуля и знать вид графиков простейших функций, изучаемых в школе.

Так, для построения графика функции $y = f(|x|)$ на основании определения модуля имеем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (I)$$

Следовательно, график функции $y = f(|x|)$ состоит из двух графиков: графика $y = f(x)$ в правой полуплоскости и графика $y = f(-x)$ в левой полуплоскости.

Пусть, например, требуется построить график функции $y = x^2 - 3|x| + 2$.

На основании определения модуля имеем:

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График изображен на рисунке 1.

После того как учащиеся познакомятся с определениями четной и нечетной функций, их можно познакомить со следующим правилом 1:

Функция $y = f(|x|)$ четная, поэтому для построения ее графика достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех $x \geq 0$ из области ее определения и отразить полученную часть графика симметрично оси ординат.

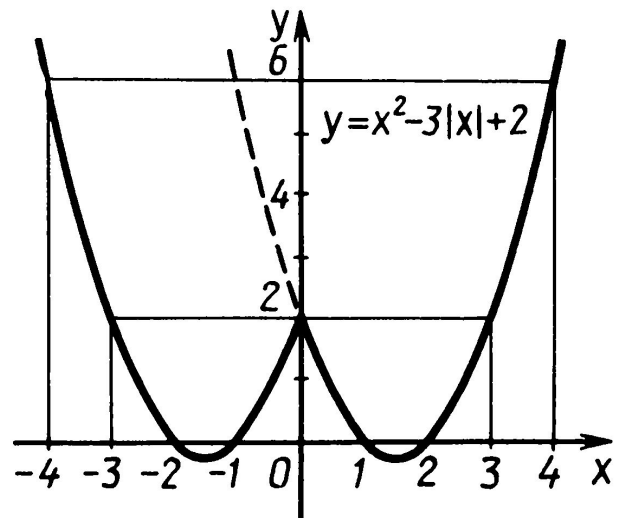


Рис 1

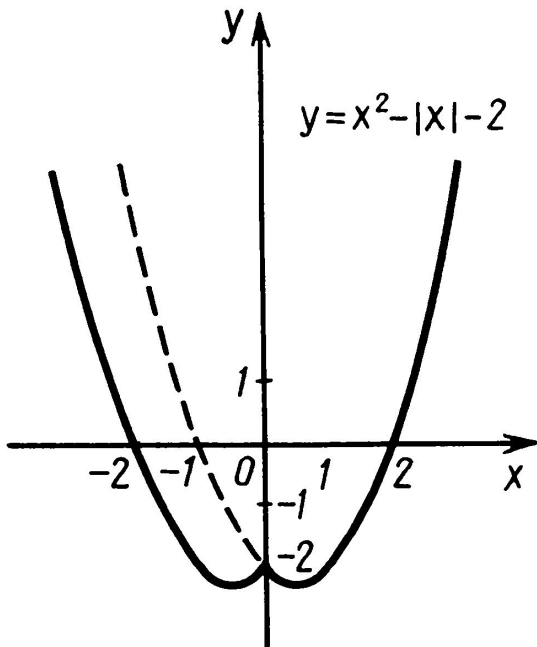


Рис 2

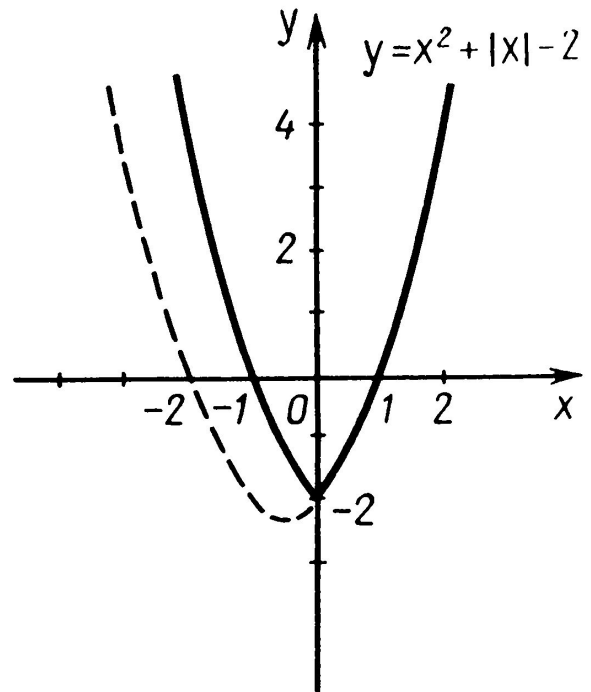


Рис 3

Знание этого правила облегчает построение графиков функций вида $y = f(|x|)$. Во избежание формализма в умениях учащихся строить графики функций вида $y = f(|x|)$ целесообразно предлагать им строить графики двумя способами:

- 1) на основании определения модуля;
- 2) на основании правила 1.

После знакомства учащихся с графиком квадратичной функции весьма интересным и полезным является построение графиков функций $y = x^2 - 3|x| + 2$ (рис. 1), $y = x^2 - |x| - 2$ (рис. 2), $y = x^2 + |x| - 2$ (рис. 3).

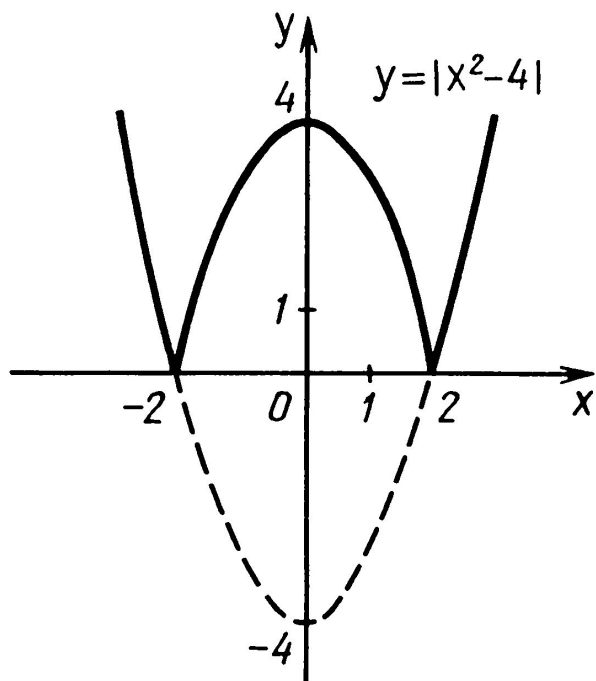


Рис. 4

В старших классах школы после знакомства учащихся с графиками тригонометрических функций полезно построить графики функций $y = \sin(|x|)$, $y = \cos(|x|)$, $y = \operatorname{tg}(|x|)$, обратив внимание учащихся, что график функции $y = \cos(|x|)$ совпадает с графиком $y = \cos x$, и выяснив причину этого (функция $y = \cos x$ является четной).

Знакомство учащихся с построением графиков функций вида $y = |f(x)|$, как и графиков функций $y = f(|x|)$, можно провести сразу же, как только они хорошо усвоят определение модуля. На основании определения модуля имеем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Формула II позволяет сформулировать правило 2:

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех x из области ее определения и ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс ($f(x) < 0$), отразить симметрично этой оси. (Предварительно следует добиться от учащихся ясного понимания того, что графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ расположены симметрично оси абсцисс.)

Таким образом, график функции $y = |f(x)|$ расположен только в верхней полуплоскости.

Так, для построения графика функции $y = |x^2 - 4|$ достаточно построить график функции $y = x^2 - 4$ для всех x и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости (при $-2 < x < 2$), отобразить симметрично оси абсцисс (рис. 4).

Как правило, учащиеся хорошо понимают правило построения графика функции $y = |f(x)|$. С помощью нескольких задач можно навыки учащихся в построении таких графиков легко довести до автоматизма. При этом учащиеся перестают задумываться, почему именно так строятся графики функций, содержащих знак модуля. Во избежание формализма в знаниях и умениях учащихся необходимо чередовать построение графиков функций вида $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$ (см. [4], № 1259 (а, б); [5], № 1114 (в, г), [6], № 1136 (а)).

С построением графиков зависимостей вида $|y| = f(x)$ учащихся можно познакомить на внеклассных занятиях, ибо построения таких графиков вызывают у учащихся наибольшие затруднения.

Учитывая, что в формуле $|y| = f(x)$ $f(x) \geq 0$ и на основании определения модуля

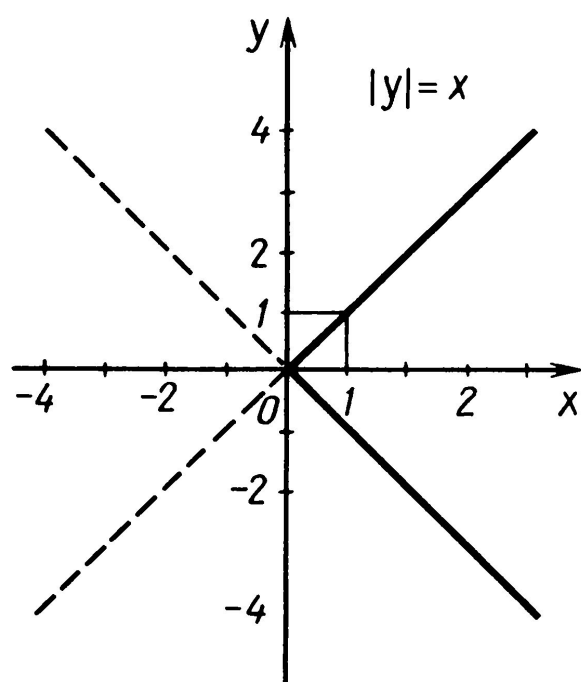


Рис. 5

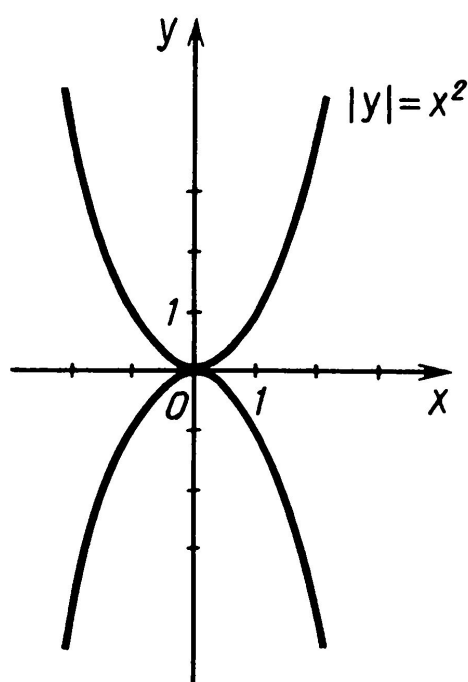


Рис. 6

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{если } y \geq 0, \\ -y, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

перепишем формулу $|y| = f(x)$ в виде

$$y = \pm f(x), \text{ где } f(x) \geq 0. \quad (\text{III})$$

Формула III позволяет сформулировать правило 3:

Для построения графика зависимости $|y| = f(x)$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для тех x из области ее определения, при которых $f(x) \geq 0$, и отразить полученную часть графика симметрично оси абсцисс.

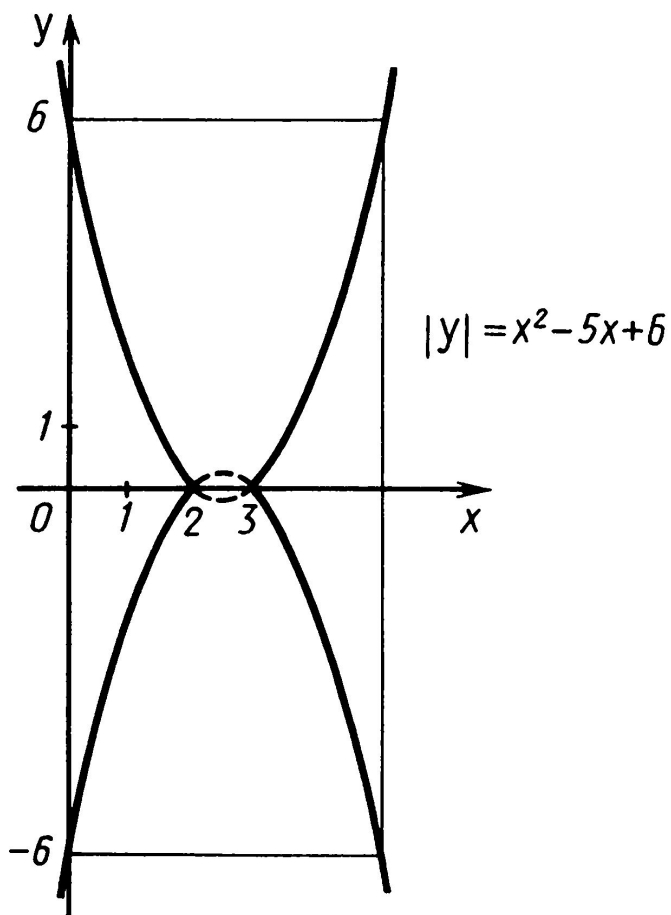


Рис. 7

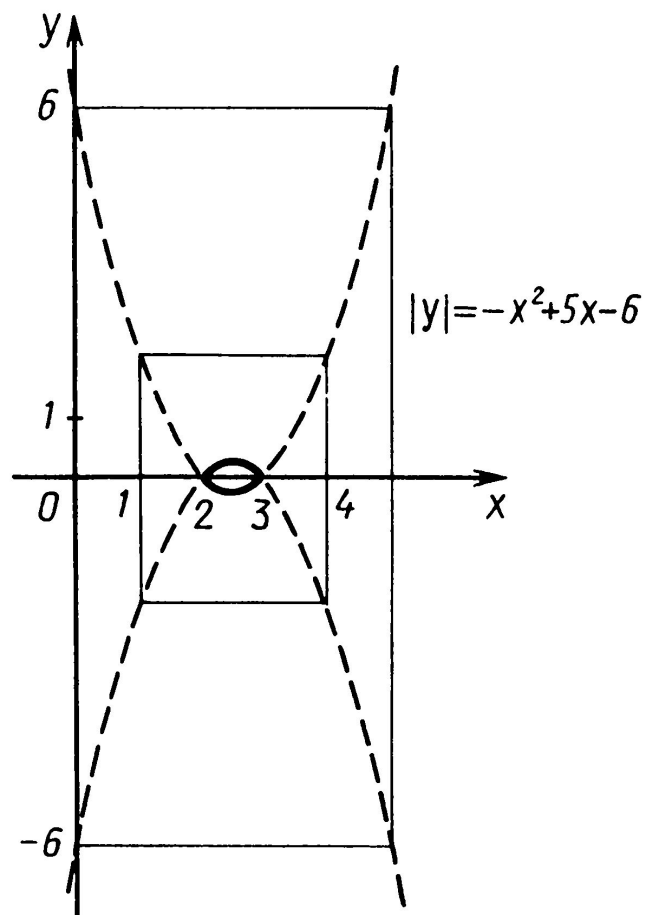


Рис. 8

Таким образом, график зависимости $|y| = f(x)$ состоит из графиков двух функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, где $f(x) \geq 0$.

В соответствии с этим правилом учащимся можно предложить построить графики функций $|y| = x$ (рис. 5), $|y| = x^2$ (рис. 6), $|y| = x^2 - 5x + 6$ (рис. 7), $|y| = -x^2 + 5x - 6$ (рис. 8).