**Практикум по теме:**

**«Критические точки функции, максимумы и минимумы»**

**Перечень вопросов, рассматриваемых на занятии:**

1) Определение точек максимума и минимума функции

2) Определение точки экстремума функции

3) Условия достаточные для нахождения точек экстремума функции

**Опорные определения и понятия по теме:**

**Возрастание функции.** Функция y=f(x) возрастает на интервале X, если для любых х1 и х2,  из этого промежутка выполняется неравенство . Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

**Максимум функции.** Значение функции в точке максимума называют максимумом функции

**Минимум функции.** Значение функции в точке минимума называют минимумом функции

**Производная**(функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в конкретной точке).

**Точка максимума функции.**Точку  х0 называют точкой максимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство  .

**Точка минимума функции.**Точку  х0 называют точкой минимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство  .

**Точки экстремума функции.**Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

**Убывание функции.**Функция y = f(x) убывает на интервале X, если для любых х1 и х2,  из этого промежутка выполняется неравенство . Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

**Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:**

1) Найти область определения функции D(f)

2) Найти f' (x).

3) Найти стационарные (f'(x) = 0) и критические (f'(x) не

существует) точки функции y = f(x).

4) Отметить стационарные и критические точки на числовой

прямой и определить знаки производной на получившихся

промежутках.

5) Сделать выводы о монотонности функции и точках ее

экстремума.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Точки, в которых происходит изменение характера монотонности функции – это ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА.

* Точку х = х0 называют **точкой минимума** функции у = f(х), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство f(x) ≥ f(x0).
* Точку х = х0 называют **точкой максимума** функции у = f(х), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство f(x) ≤ f(x0).

**Точки максимума и минимума*– точки экстремума.***

Функция может иметь неограниченное количество экстремумов.

**Критическая точка** – это точка, производная в которой равна **0** или не существует.

Важно помнить, что любая точка экстремума является критической точкой, но не всякая критическая является экстремальной.

Алгоритм нахождения максимума/минимума функции на отрезке:

1. найти экстремальные точки функции, принадлежащие отрезку,
2. найти значение функции в экстремальных точках из пункта 1 и в концах отрезка,
3. выбрать из полученных значений максимальное и минимальное.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**№1.** Определите промежуток монотонности функции у=х2-8х +5

Решение: Найдем производную заданной функции: у’=2x-8

2x-8=0



х=4

Определяем знак производной функции и изобразим на рисунке, следовательно, функция возрастает при хϵ (4;+∞); убывает при хϵ (-∞;4)

Ответ: возрастает при хϵ (4;+∞); убывает при хϵ (-∞;4)

**№2.** Найдите точку минимума функции у= 2х-ln(х+3)+9

Решение: Найдем производную заданной функции: 

Найдем нули производной: 

х=-2,5

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Ответ: -2,5 точка min

**№3.** Материальная точка движется прямолинейно по закону x(t) = 10t2 − 48t + 15, где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 3с.

Решение: Если нас интересует движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной мы получим зависимость скорости от времени.

V=х'(t)= 20t – 48. Подставляем вместо t 3c и получаем ответ. V=12 м\c

Ответ: V=12 м\c

**№4.** На рисунке изображен график функции. На оси абсцисс отмечены семь точек: x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение: Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает. В данном случае это точки х3,х5,х7. Следовательно, таких точек 3

Ответ: 3

№ 5

На рисунке изображен график функции *y* = *f*(*x*), определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f*(*x*).

**Решение.**Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.

Ответ: 44.

№ 6

На рисунке изображён график  — производной функции определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция принимает наибольшее значение?

**Решение.**На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

№ 7

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].

**Решение.**Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках −6, −2, 2, 6, 9. Тем самым, на отрезке [−10; 10] функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.

№ 8

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)*на отрезке [−2; 6].

**Решение.**Если производная в некоторой точке равна нулю и меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке [−2; 6] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка 4 является точкой экстремума.

Ответ: 4.

**№ 9**На рисунке изображён график  — производной функции *f*(*x*). На оси абсцисс отмечены восемь точек: *x*1, *x*2, *x*3, ..., *x*8. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции *f*(*x*)?



**Решение.**Возрастанию дифференцируемой функции *f*(*x*) соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках *x*4, *x*5 *x*6. Таких точек 3.

Ответ: 3.

№ 10

На рисунке изображён график дифференцируемой функции *y* = *f*(*x*). На оси абсцисс отмечены девять точек: *x*1, *x*2, *x*3, ..., *x*9. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции *f*(*x*) отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.

**Решение.**Две из отмеченных точек являются точками экстремума функции *f*(*x*). Это точки *x*3 и *x*6 (выделены красным). В них производная функции *f*(*x*) равна нулю.

В точках *x*1, *x*2, *x*7 и *x*8 функция *f*(*x*) возрастает (выделены синим). В этих четырёх точках производная функции *f*(*x*) положительна.

В точках *x*4, *x*5 и *x*9 функция *f*(*x*) убывает (выделены зеленым). В этих **трёх** точках производная функции *f*(*x*) отрицательна.

Ответ: 3.

№ 11

На рисунке изображён график функции  — производной функции *f*(*x*) определённой на интервале (1; 10). Найдите точку минимума функции *f*(*x*).

**Решение.**Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный. На интервале (1; 10) функция имеет одну точку минимума *x* = 9.

Ответ: 9.

№ 12

На рисунке изображён график функции *y = f*(*x*) и отмечены семь точек на оси абсцисс: *x*1, *x*2, *x*3, *x*4, *x*5, *x*6, *x*7. В скольких из этих точек производная функции *f*(*x*) отрицательна?

**Решение.**Производная функции отрицательна в тех точках, которые принадлежат участкам убывания функции. Это точки *x*3, *x*4, *x*7 — всего 3 точки.

Ответ: 3.

№ 13

Функция  определена и непрерывна на отрезке ![[ минус 6; 5].]() На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции  В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**Решение.**Промежутки возрастания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых её производная неотрицательна, то есть полуинтервалам (−6; −5,2] и [1,7; 5). В силу непрерывности функция *f*(*x*) возрастает на отрезках [−6; −5,2] и [1,7; 5]. Данные промежутки содержат целые точки −6, 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 8.

Ответ: 8.

**Примечание.**

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке ![[a; b]]() и монотонна на интервале  то функция монотонна на всем отрезке ![[a; b].]()

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции



не существует в точке  и положительна во всех остальных точках. Функция *f* в точке  непрерывна, следовательно, она возрастает на 

№ 14

Функция  определена и непрерывна на интервале  На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции  В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**Решение.**Промежутки возрастания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых её производная неотрицательна, то есть интервалам (−3; 1) и (1; 4). В силу непрерывности функция *f*(*x*) возрастает на интервале (−3; 4). Данный промежуток содержит целые точки −2, −1, 0, 1, 2 и 3. Их сумма равна 3.

Ответ: 3.

**Примечание.**

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке ![[a; b]]() и монотонна на интервале  то функция монотонна на всем отрезке ![[a; b].]()

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции



не существует в точке  и положительна во всех остальных точках. Функция *f* в точке  непрерывна, следовательно, она возрастает на 

№ 15

Функция  определена и непрерывна на отрезке ![[ минус 5; 6].]() На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции  В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**Решение.**Промежутки убывания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых её производная неположительна, то есть полуинтервалам (−5; −3,5] и [3,5; 6). В силу непрерывности функция *f*(*x*) убывает на отрезках [−5; −3,5] и [3,5; 6]. Данные промежутки содержат целые точки −5, −4, 4, 5 и 6. Их сумма равна 6.

Ответ: 6.

**Примечание.**

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке ![[a; b]]() и монотонна на интервале  то функция монотонна на всем отрезке ![[a; b].]()

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции



не существует в точке  и положительна во всех остальных точках. Функция *f* в точке  непрерывна, следовательно, она возрастает на 

№ 16

Функция  определена и непрерывна на полуинтервале  На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции  В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**Решение.**Промежутки убывания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых её производная неположительна, то есть интервалу (−4; −1). В силу непрерывности функция *f*(*x*) убывает на отрезке [−4; −1]. Данный промежуток содержит целые точки −4, −3, −2 и −1. Их сумма равна −10.

Ответ: −10.

**Примечание.**

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке ![[a; b]]() и монотонна на интервале  то функция монотонна на всем отрезке ![[a; b].]()

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции



не существует в точке  и положительна во всех остальных точках. Функция *f* в точке  непрерывна, следовательно, она возрастает на 

№ 17

Функция  определена и непрерывна на полуинтервале  На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции  В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**Решение.**Промежутки возрастания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых её производная неотрицательна, то есть интервалу (−1; 5). В силу непрерывности функция *f*(*x*) возрастает на полуинтервале [−1; 5). Данный промежуток содержит целые точки −1, 0, 1, 2, 3 и 4. Их сумма равна 9.

Ответ: 9.

**Примечание.**

Напомним, что если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания, то граничную точку присоединяют к этому промежутку. В частности, если функция непрерывна на отрезке ![[a; b]]() и монотонна на интервале  то функция монотонна на всем отрезке ![[a; b].]()

Обобщением этого утверждения служит следующая теорема: функция монотонна на промежутке, если ее производная сохраняет знак всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна. Например, производная функции



не существует в точке  и положительна во всех остальных точках. Функция *f* в точке  непрерывна, следовательно, она возрастает на 

**Основная литература:**

Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2020г.

**Дополнительная литература:**

Орлова Е. А., Севрюков П. Ф., Сидельников В. И., Смоляков А.Н. Тренировочные тестовые задания по алгебре и началам анализа для учащихся 10-х и 11-х классов: учебное пособие – М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2011.