Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Школа № 1»

**Приёмы быстрого счёта**

Выполнил: Рыбаков Роман

Учащийся 6 А класса

Руководитель:

Морозова И.Е.,

Учитель математики

г. Семенов

Нижегородская область

2020

**Содержание**

I. Введение ………………………………………………………….…………. 3-4

II. Основная часть. Устный счет – гимнастика ума. ………………………. 5-17

1. Как люди научились считать………………………………………………. 5-7

2.Феноменальные счётчики……………………………………….……….….. 7-8

3. Анкетирование. ………………………….…………………………….….. 9-10

4. Приемы быстрого счета………………………………………..………... 11-17

4.1. Счет на автомате……………………………………………………….. 11-12

4.2. Различные способы сложения и вычитания……………….………... 9-14

4.3.Умножение двузначного числа на 11. …………………………...…. 13-14

4.4. Умножение на 22, 33, ..., 99…………………………………………….. 15

4.5.Умножение на число 111, 1111 и т.д. ………………………………. 15-16

4.6. Умножение двузначного числа на 101. ……………………………….. 16

4.7. Умножение чисел от 10 до 20……………………………………….….. 16

4.8. Квадрат двухзначных чисел, начинающихся с 5-ти………...…….. 16-17

4.9. Квадрат двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5……………... 17

III. Заключение. Выводы исследования …………………………………….... 18

IV. Список информационных ресурсов …………………………………..….. 19

**I. Введение.**

Устный счет – гимнастика ума. Приемы быстрого счета облегчают гимнастику ума и делают ее более интересной. Устные вычисления развивают в человеке память, культуру мысли, ее четкость, ясность и быстроту, сообразительность, умение отыскивать наиболее рациональные пути для решения поставленной цели, уверенность в своих силах.

Счет в уме (устные вычисления) является самым древним и простым способом вычислений. Знание упрощенных приемов вычисления остается необходимым даже при полной механизации всех наиболее трудоемких вычислительных процессов. Кроме того, освоение вычислительных навыков развивает память и помогает школьникам полноценно усваивать предметы физико-математического цикла.

**Актуальность.**

Интерес к данной теме возник в связи с регулярным проведением математических диктантов в классе на уроках математики. Первые математические диктанты показали, что вычисления занимают у учеников моего класса много времени, а при увеличении объема вычислении в ограниченный временной промежуток, в спешке, я и мои одноклассники делаем массу ошибок. На уроках математики учитель показал нам приём быстрого умножения на числа 11, и у меня возникла идея, а существуют ли ещё приёмы быстрого вычисления. Я решил проверить на практике: действительно ли можно помочь классу считать быстро. Для начала я решил найти в литературе и другие приемы быстрого счета, овладеть ими самому и показать эти приемы одноклассникам. Кроме того, освоение навыков быстрого счёта приобрела актуальность в 9-11 классах в связи с подготовкой к ОГЭ и ЕГЭ.

**ПРОБЛЕМА:** незнание приёмов быстрого счёта ведёт к уменьшению скорости вычислений, что влечёт к понижению ресурса мыслительной деятельности.

**ПУТЬ РЕШЕНИЯ:**

Найти нестандартные приёмы устного счёта, изучая литературу, информацию в сети интернет.

**ЦЕЛЬ:** изучить разные способы и приёмы быстрого счета, не используемые на уроках для применения их при устных вычислениях.

**Задачи:**

1. Изучить литературные источники и информацию в сети интернет, в которых встречаются различные приемы быстрого счета;

2. Сделать подборку наиболее распространенных и общедоступных приемов;

3. Познакомить учащихся класса с приемами быстрого счета.

***Гипотеза:*** *Овладение приёмами устного счёта позволит повысить качество и скорость вычислений моих одноклассников.*

***Объект исследования:*** – *устный счет*

***Предмет исследования:*** *рациональные приемы устных вычислений.*

***Методы:***

* Опрос (анкетирование),
* Анализ (статистическая обработка данных),
* Работа с источниками информации,
* Практическая работа,
* Обобщение,
* Вывод.

**II. Основная часть. Устный счет – гимнастика ума.**

**1. Как люди научились считать.**

Никто не знает, как впервые появилось число, как первобытный человек начал считать. Однако десятки тысяч лет назад первобытный человек собирал плоды деревьев, ходил на охоту, ловил рыбу, научился делать каменный топор и нож, и ему приходилось считать различные предметы, с которыми он встречался в повседневной жизни. Постепенно возникало необходимость отвечать на жизненно важные вопросы: поскольку плодов достанется каждому, чтобы хватило всем, сколько расходовать сегодня, чтобы оставить про запас; сколько нужно сделать ножей и т.п. Таким образом, сам не замечая, человек начал считать и вычислять.

В начале человек научился выделять единичные предметы. Например, из стаи волков, стада оленей он выделял одного вожака, из выводка птенцов - одного птенца и т. д. Научившись выделять один предмет из множества других, говорили: *один*, а если их было больше – *много*. Даже для названия числа *один* часто пользовались словом, которым обозначался единичный предмет, например: «луна», «солнце». Такое совпадение названия предмета и числа сохранилось в языке некоторых народов до наших дней. Частые наблюдения множеств, состоящих из пары предметов (глаза, уши, крылья, руки), привели человека к представлению о числе два. До сих пор слово *два* на некоторых языках звучит так же, как «глаза» или «крылья». Если предметов было больше двух, то первобытный человек говорил «много». Лишь постепенно человек научился считать до трех, затем до пяти и до десяти и т.д. Название каждого числа отдельным словом было великим шагом вперед. Для счета люди использовали пальцы рук, ног. Ведь и маленькие дети тоже учатся считать по пальцам. Однако этот способ годился только в пределах 20. Выход нашелся: считать на пальцах до 10, а затем начинать сначала, отдельно подсчитывая количество десятков. Система счисления на основе десяти возникла как естественное развитие пальцевого счета.

По мере развития речи люди начали использовать слова для обозначения чисел. Отпала необходимость показывать кому-то пальцы, камешки или реальные предметы, чтобы назвать их количество. Для изображения чисел стали применяться рисунки, чертежи или символы. Существовали и системы с отдельными символами для каждой цифры до 9 включительно, как в арабской системе счисления, которую мы сейчас используем, а у греков имелся специальный символ и для 10. При помощи пальцев рук люди научились не только считать большие числа, но и выполнять действия сложения и вычитания.

Древние торговцы для удобства счета начали накладывать зерна и раковины на специальную дощечку, которая со временем стала называться абаком.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления - особенно последнее. «Умноженье - мое мученье, а с делением - беда», - говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления - приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия.

В книге Всеволода Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1914) изложено 27 способов умножения, причем автор замечает: «весьма возможно, что есть и еще (способы), скрытые в тайниках книгохранилищ, разбросанные в многочисленных, главным образом, рукописных сборниках». Наш современный способ умножения описан там под названием «шахматного».

Подробно разработанная система резкого повышения быстроты устного счета создана была в годы второй мировой войны цюрихским профессором математики Яковом Трахтенбергом (родился в Одессе в 1888 году. ). Она известна под названием "Системы быстрого счета". История ее создания необычная. В 1941 году гитлеровцы бросили Трахтенберга в концлагерь. Чтобы уцелеть в нечеловеческих условиях и сохранить нормальной свою психику, Трахтенберг начал разрабатывать принципы ускоренного счета. За четыре страшных года пребывания в концлагере профессору удалось создать стройную систему ускоренного обучения детей и взрослых основам быстрого счета. После войны Трахтенберг создал и возглавил Цюрихский математический институт, получивший мировую известность.

Также разработкой приемов быстрого счета занимались другие ученые: Яков Исидорович Перельман, Георгий Берман и другие.

**2.Феноменальные счётчики**

Феномен особых способностей в устном счёте встречается с давних пор. Как известно, ими обладали многие учёные, в частности, Карл Гаусс (из википедии - немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Уже в двухлетнем возрасте мальчик показал себя [вундеркиндом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%B0%D1%80%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B4%D0%B5%D1%82%D0%B8). В три года он умел читать и писать, даже исправлял счётные ошибки отца.

Однако умение быстро считать было присуще и многим людям, чья профессия была далека от математики и науки в целом.

До второй половины XX века на эстраде были популярны выступления специалистов в устном счёте. Иногда они устраивали показательные соревнования между собой. Известными российскими «суперсчетчиками» являются Арон Чиквашвили, Давид Гольдштейн, Горный (Яшков) Юрий Гаврилович, А. В. Некрасов, Владимир Кутюков; зарубежными: Борислав Гаджански, Вильям Клайн, Томас Фулер и другие.

Хотя некоторые специалисты уверяли, что дело во врождённых способностях, другие аргументированно доказывали обратное: «дело не только и не столько в каких-то исключительных, феноменальных способностях, а в знании некоторых математических законов, позволяющих быстро производить вычисления» и охотно раскрывали эти законы. Истина, как обычно, оказалась на некоей «золотой середине» сочетания природных способностей и грамотного, трудолюбивого их пробуждения, взращивания и использования. Один из примеров удачного сочетания обоих условий (природной одарённости и большой грамотной работы над собой) показал наш соотечественник уроженец Алтайского края Юрий Горный.

Начиная с 2004 года, один раз в два года проводится Мировой чемпионат по вычислениям в уме, на который собираются лучшие из ныне живущих феноменальных счётчиков планеты. Соревнования проводятся по решению таких задач, как сложение десяти 10-значных чисел, умножение двух 8-значных чисел, расчёт заданной даты по календарю с 1600 по 2100 годы, корень квадратный из 6-значного числа. Также определяется победитель в категории «Лучший универсальный феноменальный счётчик» по итогам решения шести неизвестных «задач с сюрпризом».

**3. Анкетирование.**

Для того чтобы выяснить, знают ли современные школьники другие способы выполнения арифметических действий, кроме умножения, сложения, вычитания столбиком и деления «уголком» и хотели бы узнать новые способы, был  проведен тестовый опрос:

1. Необходимо ли современному человеку устный счёт?

2. Знаете ли вы способы сложения, вычитания, умножения и деления для быстрого устного счета?

3. Пользуетесь ли вы ими?

4. Хотели бы вы узнать другие способы арифметических действий для быстрого устного счета?

Всего опрошено 52 учащихся 6,7,8,9,10 классов и получены следующие результаты:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер вопроса | ДА | НЕТ |
| № 1 | 46 | 6 |
| № 2 | 37 | 15 |
| № 3 | 34 | 18 |
| № 4 | 40 | 12 |

По результатам опроса можно сделать вывод, что 85% учащихся считают, что важно уметь быстро считать устно, 65% опрошенных знают и используют способы сложения, вычитания, умножения и деления для быстрого устного счета, однако 77% школьников хотели бы изучить другие способы быстрого устного счета, так как редко обращаются к материалу, находящемуся за пределами школьной программы.

**4. Приемы быстрого счета.**

Устный счёт — математические вычисления, осуществляемые человеком без помощи дополнительных устройств (компьютер, калькулятор, счёты и т. п.) и приспособлений (ручка, карандаш, бумага и т. п.). (Материал из Википедии)

**4.1. Счет на автомате.**

Существует определенный набор простейших арифметических правил и закономерностей, которые не только нужно знать для устного счета, но и постоянно держать в голове, чтобы в нужный момент оперативно применить самый эффективный алгоритм. Вот основные алгоритмы, которые нужно знать, помнить и применять мгновенно, автоматически:

1. Вычитание 7, 8, 9. Чтобы вычесть 9 из любого числа, нужно вычесть из него 10 и прибавить 1. Чтобы вычесть 8 из любого числа, нужно вычесть из него 10 и прибавить 2. Чтобы вычесть 7 из любого числа, нужно вычесть из него 10 и прибавить 3. Если обычно вы считаете по-другому, то для лучшего результата вам нужно привыкнуть к этому новому способу.
2. Умножение на 9, 99, 999.  Быстро умножить любое число на 9, 99, 999 можно следующим образом: К первому множителю приписать столько нулей, сколько девяток во втором множителе, и из результата вычесть первый множитель. Например:

286∙9=286∙(10 - 1)=2860 – 286=2574,

23∙99=23∙(100 - 1)=2300 – 23=2277,

18∙999=18∙(1000 - 1)=18000 – 18=17982

1. Умножение на 2.  Для устного счета очень важно уметь быстро умножать любое число на 2. Для умножения на 2 некруглых чисел нужно округлять их до ближайших более удобных.

Так 139·2 проще считать, если сначала умножить 140 на 2 (140·2=280), а потом вычесть 1·2=2 (именно 1 нужно прибавить к 139, чтобы получить 140). Итого: 140·2-1·2=280-2=278.

4. Деление на 2. Для устного счета также важно уметь быстро делить любое число на 2. Несмотря на то, что многим умножение и деление на 2 дается достаточно просто, в сложных случаях так же можно округлять числа. Например, чтобы разделить 198 на 2, нужно сначала разделить 200 (это 198+2) на 2 и отнять 1 (1 мы получили, разделив прибавленные 2 на 2). Итого: 198 : 2=200 : 2-2 : 2=100-1=99.

5. Деление и умножение на 4 и 8. Деление (или умножение) на 4 и на 8 являются двукратным или трехкратным делением (или умножением) на 2. Производить эти операции удобно последовательно. Например, 46 · 4=46 · 2 · 2 =92 · 2= 184.

6. Умножение на 5. Умножать на 5 очень просто. Умножение на 5, и деление на 2 – это практически одно и то же. Так 88·5=440, а 88/2=44, поэтому всегда умножайте на 5, поделив число на 2 и умножив его на 10.

7. Умножение на 25. Умножение на 25 соответствует делению на 4 (с последующим умножением на 100). Так 120·25 = 120 : 4·100 = 30·100 =3000.

8. Умножение на однозначные числа**.**  Чтобы быстро считать в уме, полезно уметь умножать двузначные и трехзначные числа на однозначные. Для этого нужно умножать двух- или трехзначное число поразрядно. Например, умножим 83·7. Для этого сначала умножим 8 на 7 (и допишем ноль, так как 8 - разряд десятков), и прибавим к этому числу произведение 3 и 7. Таким образом, 83·7=80·7 +3·7= 560+21=581. Возьмем более сложный пример: 236·3. Итак, умножаем сложное число на 3 поразрядно: 200·3+30·3+6·3=600+90+18=708.

9. Определение диапазонов.  Чтобы не запутаться в алгоритмах и по ошибке не выдать совсем неверный ответ, важно уметь строить примерный диапазон ответов. Так умножение однозначных чисел друг на друга может дать результат не более 90 (9·9=81), двузначных - не более 10 000 (99·99=9801), трехзначных не более - 1 000 000 (999·999=998001).

10. Деление 1000 на 2, 4, 8, 16.  И наконец, полезно знать деление чисел, кратных 10 на числа, кратные двум: 1000=2·500=4·250=8·125.

**4.2. Различные способы сложения и вычитания.**

1. Сложение. Основное правило для выполнения сложения в уме звучит так: Чтобы прибавить к числу 9, прибавьте к нему 10 и отнимите 1;чтобы прибавить 8, прибавьте 10 и отнимите 2; чтобы прибавить 7, прибавьте 10 и отнимите 3 и т.д. Например: 56 + 8=56 + 10 - 2=64;

65 + 9=65 + 10 - 1=74.

2. Сложение в уме двузначных чисел. Если цифра единиц в прибавляемом числе больше 5, то число необходимо округлить в сторону увеличения, а затем вычесть ошибку округления из полученной суммы. Если же цифра единиц меньше, то прибавляем сначала десятки, а потом единицы. Например:

34 + 48=34 + 50-2=82; 27+31=27 + 30 + 1=58.

3. Сложение трехзначных чисел. Складываем слева на право, то есть сначала сотни, потом десятки, а затем единицы. Например:

359+523= 300+500+50+20+9+3=882;

456+298=400+200+50+90+6+8=754.

4. Вычитание. Чтобы вычесть два числа в уме, нужно округлить вычитаемое, а затем подкорректируйте полученный ответ.

56-9=56-10+1=47;

436-87=436-100+13=349.

5. Вычитание числа меньшее 100 из числа большее 100 . Если вычитаемое меньше 100, а уменьшаемое больше 100, но меньше 200, есть простой способ вычислить разность в уме.

134-76= 24 +34 = 58. 76 на 24 меньше 100. 134 на 34 больше 100. Прибавим 24 к 34 и получим 58. Ответ: 58.

152-88= 64. 88 на 12 меньше 100, а 152 больше 100 на 52, значит 152-88=52+12=64. Ответ. 64.

**4.3. Умножение двузначного числа на 11**.

1. Умножение на 11 числа, сумма цифр которого не превышает 10.

Чтобы умножить на 11 число, сумма цифр которого 10 или меньше 10, надо мысленно раздвинуть цифры этого числа, поставить между ними сумму этих цифр.

72 · 11 = 7 (7+2) 2 = 792;

35 · 11 = 3 (3+5) 5 = 385;

2. Умножение на 11 числа, сумма цифр которого больше 10.

Чтобы умножить на 11 число, сумма цифр которого 10 или больше 10, надо мысленно раздвинуть цифры этого числа, поставить между ними сумму этих цифр, а затем к первой цифре прибавить 1, а вторую и последнюю (третью) цифру оставить без изменения.

78 · 11 = 7 (7+8) 8 = 7(15)8 = 858.

94 · 11 = 9 (9+4) 4 = 9 (13) 4 = 1034;

Этот метод ещё называют «Методом Ферроля».

«Краешки сложи, в серединку положи» - эти слова помогут легко запомнить данный способ умножения на 11.

3.Умножение на одиннадцать (по Трахтенбергу).

Разберем на примере: 633 умножить на 11.

Ответ пишется под 633 по одной цифре справа налево, как указано в правилах.

*Первое правило.* Напишите последнюю цифру числа 633 в качестве правой цифры результата

633 · 11

*3*

*Второе правило.* Каждая последующая цифра числа 633 складывается со своим правым соседом и записывается в результат. 3 + 3 будет 6. Перед тройкой записываем результат 6.

633 · 11

*63*

Применим правило еще раз: 6 + 3 будет 9. Записываем и эту цифру в результате:

633 · 11

*963*

*Третье правило.* Первая цифра числа 633, то есть 6, становится левой цифрой результата:

633 · 11

*6963*

Ответ: *6963*.

4. Умножение на одиннадцать по Берману. Берман вывел, что при умножении на одиннадцать, число нужно умножить на 10 и прибавить само себя, то есть то число, которое мы умножаем.

Пример: 110 ·11 = 110 · (10 + 1) = 110 · 10 + 110 ·1 = 1100 + 110 =1210

Ответ: 1210.

Пример: 123 · 11 = 123 · (10 +1) = 123 · 10 + 123 · 1 = 1230 + 123 =1353

Ответ: 1353.

**4.4.Умножение на 22, 33, ..., 99**

Чтобы двузначное число умножить на 22, 33, ..., 99, надо этот множитель представить в виде произведения однозначного числа (от 2 до 9) на 11, то есть 44 = 4∙ 11; 55 = 5 ∙ 11 и т.д. Затем произведение первых чисел умножить на 11.

Пример 1. 24 ∙ 22 = 24 ∙ 2 ∙ 11 = 48 ∙ 11 = 528

Пример 2. 23 ∙ 33 = 23 ∙ 3 ∙ 11= 69 ∙ 11 = 759

**4.5. Умножение на число 111, 1111 и т.д.**

1. Если сумма цифр первого множителя меньше 10, надо мысленно раздвинуть цифры этого числа на 2, 3 и т.д. шага, сложить цифры и записать соответствующее количество раз их сумму между раздвинутыми цифрами. Количество шагов всегда меньше количества единиц на 1.

Пример:

24 · 111 = 2 (2 + 4) (2+4) 4 = 2664 (количество шагов - 2)

24 · 1111 = 2 (2 +4) (2 +4) (2+4) 4 = 26664 (количество шагов - 3)

При умножении числа 72 на 111111 цифры 7 и 2 надо раздвинуть на 5 шагов. Эти вычисления можно легко произвести в уме.

72 · 111111 = 7999992 (количество шагов - 5)

Если единиц во втором множителе 7, то шагов будет на один меньше, т.е. 6.

Если единиц 8, то шагов будет 7 и т.д.

61· 11111111 = 677777771

Эти вычисления можно легко произвести в уме.

2. Немного сложнее выполнить устное умножение, если сумма цифр первого множителя равна 10 или более 10.

Примеры:

48 · 111 = 4 (4+8) (4+8) 8 = 4 (12) (12) 8 = (4 +1) (2+1) 28 = 5328.

В этом случае к первой цифре надо прибавить 1. Получим 5.

Далее 2 + 1 = 3. А последние цифры 2 и 8 оставляем без изменения.

56 · 11111 = 5(5+6)(5+6)(5+6)(5+6)6 = 5(11)(11)(11)(11)6 = 622216

67 · 1111 = 6(6+7)…7 = 6(13)…7 = 74437

**4.6. Умножение двузначного числа на 101, трехзначного числа на 1001**

Пожалуй, самое простое правило: припишите ваше число к самому себе. Умножение закончено. Пример: 57 · 101 = 5757,

Пример: 435 ·1001 = 435435.

**4.7. Умножение чисел от 10 до 20.**

Можно очень просто умножать такие числа. К одному из чисел надо прибавить количество единиц другого, умножить на 10 и прибавить произведение единиц чисел.

Пример 1. 16 ∙ 18=(16+8) ∙ 10+6 ∙ 8=288,

Пример 2. 17 ∙ 17=(17+7) ∙ 10+7 ∙ 7=289.

**4.8. Квадрат двухзначных чисел, начинающихся с пяти.**

Чтобы возвести в квадрат число, начинающееся на 5, надо:

1) К 52=25 прибавить число единиц «а».

2)К полученному числу приписать справа квадрат единиц.

Примеры:

562=(25+6) (62)=3136

592=(25+9) (92)=3481

(50+а)2=100∙(25+а)+а2.

Этот способ основан на тождестве:

**4.9. Квадрат двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5.**

Число десятков умножаем на число, большее его на единицу и приписываем справа квадрат 5.

Примеры: 25² = 2·(2+1) 25 = 625

75²= 7· (7+1) 25 = 5625

**III. Заключение. Выводы исследования**

Существуют способы быстрого сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень. Я рассмотрел лишь немногие способы быстрого счета. Все рассмотренные методы устного вычисления говорят о многолетнем интересе ученых и простых людей к игре с цифрами. Используя некоторые из этих методов на уроках или дома можно развить скорость вычислений, добиться успехов в изучении всех школьных предметов.

Изучив в литературных источниках приемы устного счета, я отобрал самые распространенные и общедоступные.

**Вывод:** Таким образом, мы видим, что наша первоначальная гипотеза о том, что знание и использование приемов быстрого счета позволит существенно увеличить скорость и качество счета, подтверждается. На самом деле это удивительно для меня, так как с некоторыми приемами я был знаком с начальной школы, но по-новому, как на своих помощников при счете, я взглянул на них только при выполнении данной работы.

У меня появилось желание продолжить нашу работу и узнать ещё методы устного счёта. Пока я только изучал и анализировал уже известные способы вычисления. Но кто знает, возможно, в будущем мы сами сможем открыть новые способы умножения.

Далее вместе с моими одноклассниками я планирую изучить некоторые приемы устного счета и провести по согласованию с учителем математики, математический диктант. Главное условие – все вычисления ребята должны проводить в уме или с применением карандаша и бумаги, а записывать только результат. Затем я покажу одноклассникам те приемы, которые можно было применить, и через день вновь проведу подобный диктант. После его проведения мы разоберем допущенные ошибки и изучим еще несколько приемов. Последующие три диктанта проводем раз в неделю. Все результаты проанализируем и обобщим.

**IV.** **Список информационных ресурсов**

1. Воскресенский М. П. Приёмы сокращённых вычислений. -- М. - 1958.-148с.
2. Гольдштейн Д. Н. Курс упрощённых вычислений. М.: Гос. учебно-пед. изд., 1931.
3. Катлер Э. Мак-Шейн Р. Система быстрого счёта по Трахтенбергу. -- М.: Учпедгиз.- 1967. - 150с.
4. Мартель Ф. Приемы быстрого счёта. -- Пб. - 1913. - 34с.
5. Перельман Я. И. Быстрый счёт. Л.: Союзпечать, 1945.
6. Робер Токэ «2 + 2 = 4» (1957) (англоязычное издание: «Магия чисел» (1960)).
7. <https://school-science.ru/6/7/37583>