

Примеры решения тригонометрических выражений повышенной сложности при подготовке учащихся к ЕГЭ

З.М. Кенжаев

МБОУ СОШ с. Константиновка, Николаевский район, Хабаровский край

Пример 1. Зная, что $\cos^6 x + \sin^6 x = a$, найдите $\cos^4 x + \sin^4 x$.

Решение. Преобразуем выражение $\cos^4 x + \sin^4 x$:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x.$$

Найдем значение произведения $\cos^2 x \sin^2 x$ из заданного уравнения, для чего преобразуем его левую часть:

$$\begin{aligned} \cos^6 x + \sin^6 x &= (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 = \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - 3 \cos^2 x \sin^2 x. \end{aligned}$$

Имеем $1 - 3 \cos^2 x \sin^2 x = a$, откуда $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1-a}{3}$. Следовательно,

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1-a}{3} = \frac{1+2a}{3}.$$

О т в е т: $\frac{1+2a}{3}$.

Пример 2. Вычислите при любом α сумму

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 (\alpha + 1^\circ) + \sin^2 (\alpha + 2^\circ) + \dots + \sin^2 (\alpha + 179^\circ).$$

Решение. Объединяя первое слагаемое с девяносто первым, второе с девяносто вторым и т. д. и пользуясь формулой приведения, получим:

$$\begin{aligned} &(\sin^2 \alpha + \sin^2 (\alpha + 90^\circ)) + (\sin^2 (\alpha + 1^\circ) + \sin^2 (\alpha + 91^\circ)) + \dots + \\ &+ (\sin^2 (\alpha + 89^\circ) + \sin^2 (\alpha + 179^\circ)) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \\ &+ (\sin^2 (\alpha + 1^\circ) + \cos^2 (\alpha + 1^\circ)) + \dots + \\ &+ (\sin^2 (\alpha + 89^\circ) + \cos^2 (\alpha + 89^\circ)) = 90. \end{aligned}$$